ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
450

LA THÉORIE DES FONCTIONS

Exposés publiés sous la direction de

PAUL MONTEL

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

VI

SUR LES THÉORÈMES INVERSES DES PROCÉDÉS DE SOMMABILITÉ

PAR

J. KARAMATA
Professeur à l'Université de Belgrade

PARIS
HERMANN & Cie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1937

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
450

LA THÉORIE DES FONCTIONS

Exposés publiés sous la direction de

PAUL MONTEL

Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

VI

SUR LES THÉORÈMES INVERSES DES PROCÉDÉS DE SOMMABILITÉ

PAR

J. KARAMATA
Professeur à l'Université de Belgrade

PARIS
HERMANN & C^ie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1937

INTRODUCTION

Par la notion de la sommabilité des séries divergentes, la convergence ordinaire se trouve largement étendue. Sous un certain point de vue, c'est les théorèmes inverses des procédés de sommabilité qui montrent justement dans quelle mesure est faite cette extension par un procédé particulier. Car, dans le sens le plus strict, les théorèmes inverses donnent les conditions auxquelles doivent satisfaire les termes d'une série pour qu'on puisse conclure sa convergence, sachant qu'elle est sommable par ce procédé. C'est par la nature de cette condition supplémentaire — *condition de convergence* — que se trouve caractérisée cette extension ou, si l'on veut, la capacité sommatrice du procédé.

Dans un sens plus large, on désigne par *théorèmes directs*, (théorèmes de nature abelienne) tout théorème donnant les propriétés limites d'un procédé lorsqu'on sait les propriétés limites correspondantes des termes de la série. Les *théorèmes inverses* (théorèmes de nature tauberienne) sont alors ceux qui donnent les conditions pour que l'inverse ait lieu. De ce point de vue général, on peut en principe distinguer deux groupes de théorèmes inverses. Citons en exemple type de ces groupes, les deux théorèmes de Hardy et Littlewood :

I. — *La série* Σu_n *étant sommable*-A :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu r^\nu \to s, \qquad r \to 1,$$

il en résultera sa convergence $\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu \to s \quad (n \to \infty)$, *lorsque la condition de convergence*

$$u_n > O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty,$$

est satisfaite.

II. — *Les termes de la suite a_n étant positifs, de la relation*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu r^\nu \sim A(1-r)^{-k}, \qquad k \geqslant 0, \qquad r \to 1,$$

il résulte

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sim \frac{A}{\Gamma(k+1)} n^k, \qquad n \to \infty.$$

Nous nous bornerons ici exclusivement à l'étude des théorèmes inverses du premier groupe, et en distinguerons deux types suivant la forme de leur condition de convergence. Nous dirons ainsi des conditions

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu = o(n), \qquad n \to \infty,$$

$$\sum_{\nu=n}^{n'} u_\nu \to 0, \qquad \text{pour} \qquad n \leqslant n' \leqslant \lambda n, \qquad n \to \infty,$$

ou bien de leurs variations du même genre, qu'elles sont du type-o, pour les distinguer des conditions de convergence du type-O, qui sont p. ex. du genre

$$u_n = O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty,$$

ou bien

$$\limsup_{n=\infty} \ \operatorname*{Max}_{n \leqslant n' \leqslant \lambda n} \left| \sum_{\nu=n}^{n'} u_\nu \right| < w(\lambda) \to 0, \qquad 1 < \lambda \to 1.$$

Les théorèmes inverses relatifs aux conditions de convergence du type-o présentent un caractère élémentaire et, en général, tout procédé de sommabilité est susceptible d'une telle inversion.

Il n'en est pas de même des théorèmes inverses relatifs aux conditions de convergence du type-O. Ces théorèmes sont bien plus difficiles à établir, et cette difficulté provient en grande partie du fait que tout procédé de sommabilité susceptible d'une inversion relative à une condition de convergence du type-o ne l'est plus, en général, lorsqu'on y passe à la condition de convergence correspondante du type-O. Nous verrons que cela dépend d'un

problème d'unicité relatif à une équation intégrale singulière. A tous ces procédés de sommabilité il correspond, en effet, une équation de la forme

$$\int_0^\infty N(xt)f(t)dt = s\int_0^\infty N(xt)dt, \qquad x \geqslant 0,$$

de manière que le procédé est susceptible ou non d'une telle inversion, suivant que cette équation possède ou ne possède pas $f(t) \equiv s$ comme unique solution bornée. La méthode qui nous permet d'obtenir ce théorème inverse dans toute sa généralité consiste en principe en ceci : On choisit convenablement une fonction $\Lambda(x)$ qui, d'une part, détermine la forme de la condition de convergence, et, d'autre part, par la substitution $\nu = \Lambda(\mu)$, effectuée dans le procédé de sommabilité, ramène ce procédé général à la classe des procédés, nommés par R. Schmidt [*a*], « gestrahlte Mittelbildungen ». Ces derniers procédés, écrits sous la forme $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} p_{n,\nu}s_\nu$ $(n \to \infty)$, sont caractérisés par le fait que

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu \leqslant nt} p_{n,\nu} = \varphi(t),$$

existe pour tout t $\geqslant 0$. Un simple artifice exposé dans ma Note [*q*]) permet alors de réunir les théories de R. Schmidt [*a*, *b*] et N. Wiener [*a*, *b*, *c*, *d*] puisque l'équation intégrale citée aura la propriété mentionnée lorsque

$$\int_0^\infty N(t)t^{ui}dt \neq 0 \qquad \text{pour tout } u \text{ réel.}$$

Des aperçus plus ou moins complets des théorèmes de ce groupe se trouvent, par exemple chez L. Bieberbach [*a*, p. 475-490], J. Karamata [*k*], K. Knopp [*c*, p. 48-53 ; *g*, p. 473-536], O. Szász [*c*, *e*] et N. Wiener [*c*].

Les théorèmes inverses du second groupe présentent un caractère semblable. Ils peuvent d'ailleurs être ramenés dans la plupart des cas aux théorèmes inverses proprement dits, en les rapportant aux conditions de convergence considérées au § 19.

I. — LES THÉORÈMES INVERSES RELATIFS AUX CONDITIONS DE CONVERGENCE DU TYPE-o

1. — En partant de l'identité

$$\frac{n+1}{n} s_n - \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

où l'on a posé

$$s_n = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

on voit immédiatement qu'une série Σu_n sommable par la première moyenne arithmétique de Cesàro — sommable -(C, 1) —, convergera vers sa somme généralisée toutes les fois que

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu \to 0 \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{n} \cdot \tag{1}$$

Cette simple remarque donne une inversion du procédé de sommabilité (C, 1) avec la condition de convergence (1) du type-o.

A. Tauber [a] avait montré qu'il en est de même de la sommabilité d'Abel :

*Toute série Σu_n sommable-*A:

$$(A) \qquad f(r) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu r^\nu \to s, \qquad r \to 1,$$

sera convergente, lorsque la condition de convergence (1) *est satisfaite.*

Ce théorème de Tauber contient l'inversion de la sommabilité de Cesàro d'ordre quelconque — sommabilité-(C, k) — pour tout $k \geqslant 1$. Car toute série sommable-(C, k) est sommable-A (voir par exemple K. Knopp [a, p. 12-19]), par suite si elle satisfait à la condition de convergence (1) elle sera convergente. Des démonstrations directes de ce théorème, sans passer par le théorème (C, k) $\to$ A et celui de Tauber ont

été données par K. Knopp [b, p. 239-241], Hardy et Littlewood [h, p. 75-76] et K. K. Chen [a]. — Quant au théorème de Tauber voir de même A. Pringsheim [a].

2. — D'une manière semblable se comportent les inversions des procédés de sommabilité

$$\mathrm{R}(\lambda_n, k) \qquad \mathrm{R}_k(w) = \sum_{\lambda_\nu \leqslant w} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{w}\right)^k u_\nu, \qquad (w \to \infty), \tag{2}$$

et

$$\mathrm{D}(\lambda_n) \qquad \mathrm{D}(\sigma) = \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu e^{-\sigma\lambda_\nu}, \qquad (\sigma \to 0), \tag{3}$$

où

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{n-1} \leqslant \lambda_n \to \infty, \qquad n \to \infty.$$

Ainsi l'identité

$$\sum_{\lambda_\nu \leqslant w} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{w}\right) u_\nu = \sum_{\lambda_\nu \leqslant w} u_\nu - \frac{1}{w} \sum_{\lambda_\nu \leqslant w} \lambda_\nu u_\nu,$$

montre qu'une série sommable -R(λ_n, 1) est convergente lorsqu'elle satisfait à la condition de convergence du type-*o*

$$\frac{1}{w} \sum_{\lambda_\nu \leqslant w} \lambda_\nu u_\nu \to 0, \qquad w \to \infty, \tag{4}$$

qui est d'ailleurs équivalente à

$$\frac{1}{\lambda_n} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu u_\nu \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{5}$$

Il en est de même des procédés de sommabilité R (λ_n, k) et D(λ_n), car *toute série sommable*-R(λ_n, k), $k \geqslant 0$, *est sommable*, D(λ_n) et d'autre part (W. Schnee [a, p. 100, Th. III]) *toute série sommable*-D(λ_n) *qui satisfait à la condition de convergence* (5) *est convergente.*

Les démonstrations directes de l'inversion du procédé R(λ_n, k) ont été données en particulier par W. Rogosinski [a, p. 148] et H. Higaki [a, p. 71, Th. II.].

Ces résultats se démontrent le plus facilement en écrivant les expressions correspondantes sous forme d'intégrales. $s(t)$ étant une

fonction à variation bornée dans tout intervalle fini ($t \geqslant 0$), les expressions

$$x^{-k}C_k(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{x}\right)^k d \{ s(t) \}, \tag{6}$$

$$J(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} d \{ s(t) \}, \tag{7}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t d \{ s(t) \},$$

se réduisent respectivement aux expressions (2), (3) et (4) en posant

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \lambda_1 \\ s_n & \text{pour} \quad \lambda_n < t \leqslant \lambda_{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3 \cdots. \end{cases}$$

De la sorte, les théorèmes mentionnés se généralisent comme suit :

La relation

$$x^{-k}C_k(x) \to s, \qquad x \to \infty,$$

implique

$$J(\sigma) \to s, \qquad \sigma \to 0,$$

et de cette dernière relation il résulte que $s(t) \to s$, *lorsque*

$$\delta(x) \to 0, \qquad x \to \infty.$$

Remarquons que la première affirmation est une conséquence immédiate de l'identité

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} d \{ s(t) \} = \frac{\sigma^k}{\Gamma(k+1)}\int_0^\infty e^{-\sigma t} d \{ C_k(t) \}, \qquad k \geqslant 0,$$

valable sous l'hypothèse que la première de ces intégrales converge.

3. — L'expression (6), avec $x = 1/\sigma$, et l'expression (7) sont des cas particuliers d'une intégrale de la forme

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(\sigma t) d \{ s(t) \}. \tag{8}$$

Cette dernière intégrale se réduit, en effet, à (6) lorsque

$$\varphi(t) = \begin{cases} (1 - t)^k & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0 & \text{pour} \quad 1 \leqslant t, \end{cases}$$

et à (7) lorsque

$$\varphi(t) = e^{-t}.$$

Or, dans l'expression (8) nous avons un procédé de sommabilité — la sommabilité Φ — dont la forme correspondante aux séries

$$\Phi(\sigma) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\sigma\nu) u_\nu,$$

s'obtient en posant

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ s_n & \text{pour} \quad n < t \leqslant n+1, \qquad n = 1, 2, 3 \cdots. \end{cases}$$

Il est connu (voir p. ex. O. Perron [a]), que toute série Σu_n, ou bien toute fonction $s(t)$ convergente est sommable-Φ vers la même limite, lorsque p. ex. la fonction $\varphi(t)$ est positive, continue, non décroissante et $\varphi(0) = 1$.

C'est le théorème direct du procédé de sommabilité-Φ. Quant au théorème inverse, il est analogue à ceux des articles précédents et s'énonce comme suit :

Lorsque la fonction $\varphi(t)$ satisfait aux conditions mentionnées et lorsqu'en outre les deux intégrales

$$\int_0 \frac{1-\varphi(t)}{t} dt \qquad et \qquad \int^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt, \tag{9}$$

convergent, la fonction $s(t)$, sommable-Φ :

$$\Phi(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(\sigma t) d\,\{\, s(t) \,\} \rightarrow s, \qquad \sigma \rightarrow 0, \tag{10}$$

sera convergente si elle satisfait à la condition de convergence

$$\delta(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t\, d\,\{\, s(t) \,\} \rightarrow 0, \qquad x \rightarrow \infty. \tag{11}$$

Le procédé Φ contient en outre bien d'autres procédés de sommabilité particuliers ; nous pourrons citer à titre d'exemple le procédé

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{x}{x+\nu}\right)^k u_\nu, \qquad (x \rightarrow \infty),$$

ainsi que celui relatif à la série de Lambert

$$(1-x) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu x^\nu}{1-x^\nu} u_\nu, \qquad (x \rightarrow 1).$$

Le premier de ces deux procédés s'obtient de (10) en posant

$$\varphi(t) = (1 + t)^{-k} \qquad \text{et} \qquad \sigma = \frac{1}{x} ;$$

sous forme d'intégrale il a été étudié par Hardy et Littlewood [*i*, p. 34, Lemme η] et O. Szász [*f*, p. 328, Lemme 4]. Quant au second procédé il s'obtient de (10) en posant

$$\varphi(t) = \frac{t}{e^t - 1} \qquad \text{et} \qquad \sigma = -\log x ;$$

l'inversion que nous venons d'en donner se trouve en particulier chez A. Kienast [*c*].

D'ailleurs, Kienast a établi dans cette même note [*c*, p. 74, Th. III] un théorème inverse général, en montrant que la condition (11), c'est-à-dire

$$\frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu \to 0, \qquad n \to \infty,$$

est la condition de convergence de tout procédé de la forme

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) u_\nu, \qquad (x \to 1),$$

lorsque les fonctions $f_n(x)$ satisfont aux conditions

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} | f_\nu(x) - f_{\nu+1}(x) | = O(1), \qquad x \to 1,$$

$$| 1 - f_n(x) | < n(1 - x) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left| f_\nu\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = O(1), \qquad n \to \infty .$$

Remarquons encore que la première des conditions (9) du théorème cité plus haut, n'est pas essentielle comme je l'ai montré dans la note [*l*, p. 160).

4. — A part le procédé étudié par A. Kienast, tous les procédés de sommabilité envisagés jusqu'à présent appartenaient à un même type. Leur noyau $\varphi(\sigma\nu)$ est une fonction du produit des deux variables, ou du moins peut se réduire à un tel par des substitutions convenables.

Un caractère différent présente p. ex. la sommabilité B de Borel, définie par

$$\text{(B)} \qquad B(x) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu !} s_\nu, \qquad (x \to \infty).$$

Hardy et Littlewood ont montré [a, Th. 1] que toute suite s_n sommable-B est convergente lorsque la condition de convergence

$$s_n - s_{n-1} = u_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad n \to \infty, \tag{12}$$

est satisfaite. Ce procédé est pourtant susceptible d'une inversion de tout point semblable à celles que nous venons de donner, c'est-à-dire relatives à une condition de convergence de la forme (5), avec la suite particulière

$$\lambda_n = e^{\sqrt{n}}.$$

La condition ainsi obtenue contient (12) comme cas particulier et le théorème inverse correspondant s'énoncerait :

Toute série Σu_n *sommable* -B :

$$\mathrm{B}(x) = e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} s_\nu \to s, \qquad x \to \infty,$$

est convergente lorsque

$$\delta_n = e^{-\sqrt{n}} \sum_{\nu=0}^{n} e^{\sqrt{\nu}} u_\nu \to 0 \qquad \textit{avec} \qquad \frac{1}{n}.$$

5. — De ces cas particuliers il ressort un principe applicable aux procédés de sommabilité de forme générale. Soit, en effet,

$$(\Phi) \qquad \Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) u_\nu, \qquad (x \to \infty),$$

un tel procédé. Il lui correspond alors une suite indéfiniment croissante de nombres λ_ν de manière que

$$\delta_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu u_\nu \to 0 \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{n},$$

représente la condition de convergence. En d'autres termes, à tout noyau $\varphi_\nu(x)$ on peut rattacher une suite λ_ν telle que les relations

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(x) u_\nu \to s, \qquad x \to \infty,$$

$$\delta_n = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu u_\nu \to 0, \qquad n \to \infty,$$

entraînent la convergence de la série Σu_n vers la somme s.

Il est évident que le noyau $\varphi_\nu(x)$ doit en outre satisfaire à certaines conditions auxiliaires. Ainsi, il est de la nature du problème que le procédé soit régulier, c.-à-d. que toute série convergente soit sommable-Φ vers la même limite. Pour que cela ait lieu (voir O. Toeplitz [a], I. Schur [a], O. Perron [a], G. Lorentz [a] ou K. Chen [a]), il faut et il suffit que

$$\varphi_\nu(x) \to 1 \qquad \text{pour tout} \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots, \qquad x \to \infty,$$

et que

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} | \varphi_\nu(x) - \varphi_{\nu-1}(x) | = O(1), \qquad x \to \infty .$$

Ce sont les conditions que doit satisfaire le noyau $\varphi_\nu(x)$ pour que le problème direct ait lieu. Le problème inverse exige en outre certaines conditions supplémentaires qui résulteront des considérations suivantes.

Exprimons d'abord le procédé Φ sous la forme intégrale

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \varphi(x, t) d \{ s(t) \}, \tag{13}$$

qui est plus facile à manier. Alors, le théorème direct aura lieu lorsque

$$\varphi(x, t) \to 1 \qquad \text{pour tout} \qquad t \geqslant 0, \qquad x \to \infty,$$

et

$$\int_0^\infty | d\varphi(x, t) | = O(1), \qquad x \to \infty.$$

Cette dernière condition est en particulier remplie lorsque $\varphi(x, t)$ *ne croît pas par rapport à t, à partir d'un x.*

Ces hypothèses faites pour obtenir le théorème inverse il s'agit de trouver une fonction continue, indéfiniment croissante $\Lambda(x)$, telle que la condition de convergence relative à la sommabilité Φ soit

$$\delta(x) = \frac{1}{\Lambda(x)} \int_0^x \Lambda(t) d \{ s(t) \} = o(1), \qquad x \to \infty. \tag{14}$$

A cet effet résolvons (14) par rapport à $s(t)$:

$$s(x) = \delta(x) + \int_0^x \delta(t) \frac{d \{ \Lambda(x) \}}{\Lambda(x)} = \delta(x) + \int_0^x \delta(t) d \{ \lambda(t) \}, \quad \text{où} \quad \lambda(t) = \log \Lambda(t),$$

et substituons cette valeur de $s(t)$ dans (13) :

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \varphi(x, t) d \{ \delta(t) \} + \int_\theta^\infty \varphi(x, t)\delta(t) d \{ \lambda(t) \}.$$

Le procédé Φ étant supposé régulier

$$\int_0^\infty \varphi(x, t) d \{ \delta(t) \} \to 0 \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{x},$$

puisque $\delta(x) \to 0$. Par suite, en choisissant convenablement y, on aura

$$\begin{aligned} \Phi(x) - s(y) &= \int_0^\infty \varphi(x, t)\delta(t) d \{ \lambda(t) \} - \int_0^y \delta(t) d \{ \lambda(t) \} + o(1) \\ &= \int_0^\infty \bar{\varphi}(x, y, t)\delta(t) d \{ \lambda(t) \} + o(1), \qquad x, y \to \infty, \end{aligned}$$

où

$$\bar{\varphi}(x, y, t) = \begin{cases} \varphi(x, t) - 1 & \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant y \\ \varphi(x, t) & \text{pour} \quad y < t. \end{cases}$$

Donc, pour que $\Phi(x)$ et $s(y)$ convergent en même temps, lorsque x et y tendent vers l'infini, il suffit que

$$\int_0^\infty \bar{\varphi}(x, y, t)\delta(t) d \{ \lambda(t) \} \to 0, \qquad x, y \to \infty.$$

Mais, en tenant compte des hypothèses faites sur $\varphi(x, t)$ et de la condition de convergence (14), l'on voit que cette dernière relation aura lieu (voir p. ex. I. Schur [*a*]) lorsque

$$\int_0^\infty |\bar{\varphi}(x, y, t) | \, d \{ \lambda(t) \} = O(1), \qquad x, y \to x,$$

c'est-à-dire lorsque

$$\int_0^y | 1 - \varphi(x, t) | \, d \{ \lambda(t) \} = O(1)$$

et

$$\int_y^\infty |\varphi(x, t) | \, d \{ \lambda(t) \} = O(1), \qquad x, y \to \infty.$$

Dans le cas particulier où $\varphi(x, t)$ est monotone le théorème inverse général ainsi obtenu peut s'énoncer comme suit :

THÉORÈME A. — *Soit* $\varphi(x, t)$ *une fonction positive et continue pour* $x \geqslant 0$ *et* $t \geqslant 0$, *qui satisfait aux conditions :*

$$\varphi(x, 0) = 1, \ \varphi(x, t) \to 1 \ \text{pour tout } t \geqslant 0, \ x \to \infty,$$

$\varphi(x, t)$ *ne croît pas par rapport à t à partir d'un x.*

Soit $\Lambda(x)$ *une fonction monotone, continue, indéfiniment croissante, telle qu'en posant* $\lambda(x) = \log \Lambda(x)$, *on ait pour un y convenablement choisi*

$$\left.\begin{aligned} \lambda(y) - \int_0^y \varphi(x, t)d\,\{\lambda(t)\} = O(1), \\ \int_y^\infty \varphi(x, t)d\,\{\lambda(t)\} = O(1), \qquad x, y \to \infty \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Alors toute fonction s(t) sommable -Φ :

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \varphi(x, t)d\,\{s(t)\} \to s, \qquad x \to \infty,$$

sera convergente lorsque la condition de convergence (14) *est satisfaite.*

Nous voyons ainsi que (14) sera une condition de convergence du procédé de sommabilité Φ, pourvu que la fonction $\lambda(x) = \log \Lambda(x)$ satisfasse aux conditions (15). Or, par ces conditions la fonction $\Lambda(x)$ n'est pas univoquement déterminée (Voir p. ex. A. Kienast [*a*, p. 139, Th. 15]). Il s'agit alors de trouver parmi ces fonctions celle qui croît le plus vite possible. Car, c'est dans ce cas que la condition de convergence (14) restreint le moins la fonction $s(t)$ et agrandit, par suite, le champ d'application du théorème A.

Donnons à titre d'exemple, quelques-unes des fonctions $\Lambda(x)$, correspondantes à divers procédés particuliers de sommabilité.

Aux procédés :

D(log *n*) : $$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \nu^{-\sigma}, \qquad (\sigma \to 0),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \frac{1}{\log(\nu+1)} \int_0^r \frac{1 - t^\nu}{-\log t} dt, \qquad (r \to 1)$$

$$\int_1^\infty u(t) t^{-\sigma} dt, \qquad (\sigma \to 0),$$ (voir G. Doetsch [*a*, p. 79, Lemme 2.])

il correspond la fonction $\Lambda(x) = \log x$; aux procédés de Cesàro d'ordre quelconque, à celui d'Abel, de Le Roy

LR : $$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \frac{1}{\nu\,!} \Gamma(\nu t + 1), \qquad (t \to 1)$$

et à celui de De la Vallée-Poussin

$$\text{VP :} \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \frac{(n\,!)^2}{(n-\nu)\,!\,(n+\nu)\,!}, \qquad (n \to \infty)$$

c'est toujours la même fonction $\Lambda(x) = x$ qui leur correspond ; au procédé défini par

$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{\frac{t}{x}} - \sqrt{x}\right)^2} t^{-\frac{1}{4}} s(t)dt, \qquad (x \to \infty)$$

se rapporte la fonction

$$\Lambda(x) = e^{\sqrt[4]{x}};$$

au procédé d'Euler (voir K. Knopp [e, 132-138])

$$\text{E :} \qquad 2^{-n} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu \binom{n}{\nu}, \qquad (n \to \infty)$$

et à celui défini par les fonctions $\mathrm{E}(\alpha, x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\Gamma(\alpha\nu + 1)}$, $\alpha > 0$,

de Mittag-Leffler (voir G. Valiron [a, p. 6 et 10, § 8])

$$\frac{1}{\mathrm{E}(\alpha, x)} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \frac{x^\nu}{\Gamma(\alpha\nu + 1)}, \qquad (x \to \infty)$$

il correspond la fonction

$$\Lambda(x) = e^{\sqrt{x}};$$

enfin, au procédé

$$e^{-x} \int_0^x e^t d \{ s(t) \}, \qquad (x \to \infty)$$

il correspond la fonction

$$\Lambda(x) = e^x.$$

Des fonctions $\Lambda(x)$ (données sous la forme de suites λ_n) correspondantes à d'autres procédés particuliers de sommabilité se trouvent encore chez A. Kienast [a, b, c].

6. — La forme générale de la condition de convergence des théorèmes que nous venons de considérer avait l'une des deux formes, (5) et (14) où $\Lambda(x)$ est une fonction continue, monotone interpolant la suite λ_n.

Or, la condition (5) est précisément celle qu'avait considérée L. Kronecker [a], en montrant qu'elle est satisfaisante toutes les

fois que la série Σu_n converge, quelle que soit la suite monotone λ_n tendant vers l'infini avec n. Il en résulte que cette condition de convergence représente en même temps une condition nécessaire et suffisante pour qu'une série sommable par l'un quelconque de ces procédés soit convergente.

D'un autre côté, K. Knopp [*f*] avait démontré un théorème en quelque sorte inverse à celui de Kronecker, à savoir :

Pour que la série Σu_n soit convergente, il suffit que la condition (5) *soit satisfaite pour toute suite monotone et divergente λ_n.*

Cela nous donne un autre aspect des théorèmes inverses relatifs à la condition de convergence de forme (5). Lorsqu'une série Σu_n n'est assujetie à aucune condition, pour qu'elle soit convergente il faut que la condition de Kronecker (5) soit satisfaite pour toute suite λ_n. Mais lorsque cette série est sommable par un certain procédé donné, pour qu'elle soit convergente, il suffit déjà que la condition de Kronecker soit satisfaite pour une suite déterminée λ_n. Cette suite dépend évidemment du procédé particulier considéré ; plus le procédé est restreint, plus la suite croît vite et par là restreint moins la série Σu_n.

Ces faits ressortiront encore mieux, en transformant la condition de Kronecker en une condition équivalente qui se rapporte seulement à un groupe plus ou moins long de termes de la série Σu_n. M. Riesz [*a*, p. 357, § 3] (voir de même mes Notes [*n* et *o*]) a montré, en effet, que la condition (5) relative à une suite déterminée λ_n est équivalente à la suivante :

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'+1} u_\nu \to 0, \qquad n \to \infty, \tag{16}$$

pour tout n' tel que

$$\lambda_n \leqslant \lambda_{n'} \leqslant \lambda \cdot \lambda_n,$$

λ étant un nombre fixe > 1. L'intervalle (n, N) de variation des n' de cette condition est donc déterminé par

$$N = N(\lambda \cdot \lambda_n) - 1, \qquad \text{ou bien par} \qquad N = V\{\lambda \Lambda(n)\},$$

où $N(x)$ désigne le nombre des éléments λ_n inférieurs ou égaux à x, et $V(x)$ la fonction inverse de $\Lambda(x)$.

En comparant alors la condition (16) à celle de Cauchy, le fait mentionné tout à l'heure peut encore s'exprimer de la manière

suivante. Pour qu'une série Σu_n, qui n'est assujetie à aucune condition, soit convergente il faut que la condition (16) soit satisfaite pour tout $n' > n$. Lorsque, par contre, cette série est sommable par un certain procédé, cet intervalle de variation des n' — (n, ∞) — peut se réduire en un intervalle plus petit — (n,N) —, dont la longueur (asymptotique) dépend du procédé en question.

Le fait qu'une série soit sommable par un procédé donné, d'une part, et celui de satisfaire à une condition de convergence de l'autre se compensent. Par suite, la longueur de cet intervalle (n,N) mesure en quelque sorte l'efficacité des procédés de sommabilité. Plus l'intervalle (n,N) est long, plus la condition de convergence (16) restreint la série, plus le procédé correspondant est efficace, et inversement. La longueur de l'intervalle (n,N) est liée par l'intermédiaire de la fonction $\Lambda\,(x)$ au procédé Φ par les relations (15) ; d'autres rapports, en quelque sorte plus intimes entre l'intervalle (n,N) et le noyau $\varphi\,(x,t)$ se trouvent donnés dans mes Notes [f et k].

C'est par $\mathrm{N} = \mathrm{V}\,\{\lambda\Lambda(n)\}$ que la longueur de l'intervalle (n,N) est liée à la vitesse de croissance de la fonction $\Lambda\,(x)$. Il en ressort que cet intervalle est d'autant plus court plus cette fonction croît vite, et réciproquement. Mais cela n'a lieu que jusqu'à une certaine mesure ; ainsi, en remplaçant, par exemple, λ_n par λ^k_n quelque grand que soit k, l'intervalle n'est pas diminué sensiblement puisque $\mathrm{V}\,\{\lambda\Lambda(n)\}$ se trouve remplacé par $\mathrm{V}\,\{\lambda'\Lambda(n)\}$ où $\lambda' = \sqrt[k]{\lambda}$. Ce fait ressort d'ailleurs aussi des conditions (15), puisque dans celles-ci, ce n'est que la fonction $\log \Lambda\,(x)$ qui entre en jeu.

Les conditions de convergence (5), (14) ou (16) contiennent encore comme cas particulier certaines conditions moins générales, mais qui sont plus simples. On remarque ainsi facilement que (5) est satisfait dès que

$$u_n = o\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right), \qquad n \to \infty, \tag{17}$$

et (14) lorsque

$$u(t) = s'(t) = o\left(\frac{\Lambda'(t)}{\Lambda(t)}\right), \qquad t \to \infty.$$

Ces conditions représentent donc de même des conditions de convergence, quoiqu'elles ne sont plus nécessaires pour que Σu_n ou bien $s(t)$ converge.

La plupart des théorèmes inverses établis se rapportaient d'abord aux conditions de convergence de la forme (17). Ainsi, E. Landau [*a*] avait d'abord donné (en généralisant la proposition correspondante de Tauber [*a*, p. 274, Proposition B]) la condition de convergence du procédé D(*log n*) sous la forme

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\log n\right), \qquad n \to \infty,$$

et celle du procédé général $D(\lambda_n)$ sous la forme (17) ; il a montré en outre dans cette même note que

$$u_n = o\left(\frac{p_n}{P_n}\right), \qquad n \to \infty,$$

où

$$o \leqslant p_n \to o \qquad \text{et} \qquad P_n = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \to \infty, \qquad n \to \infty,$$

est la condition de convergence des procédés définis par l'une de deux séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u \frac{1}{(1+xp_1)(1+xp_2)\cdots(1+xp_\nu)}, \qquad (x \to 0),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu(1-xp_1)(1-xp_2)\cdots(1-xp_\nu), \qquad (x \to 0);$$

et enfin que

$$u(t) = o\left(\frac{1}{t}\log t\right), \qquad t \to \infty,$$

est une condition suffisante pour que l'intégrale $\int_1^\infty u(t)dt$ converge vers s, lorsque

$$\int_1^\infty u(t)t^{-\sigma}dt \to s, \qquad \sigma \to 0.$$

D'autre part, Hardy et Littlewood [*a*] ont montré qu'une série Σu_n sommable-B sera convergente lorsque

$$u_n = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad n \to \infty,$$

proposition que K. Knopp [*e*, p. 136] a établie directement pour le procédé d'Euler (c'est-à-dire sans passer par l'inversion du procédé B et le théorème E → B). — L'inversion du procédé défini par la série de Lambert relative à la condition de convergence

$$u_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty,$$

avait été donnée par K. Ananda-Rau [*b*, § 4], tandis que A. Kienast [*c*, p. 46, Th. II] avait donné la classe générale de procédés de sommabilité, mentionnée à la fin du § 3, dont « $u_n = o(1/n)$ » est la condition de convergence.

Quant à la condition de convergence de forme (16) elle se présente pour la première fois chez R. Schmidt [*a*, p. 127-132], qui a donné (à la p. 129, Th. V) le théorème inverse pour la classe des « gestrahlte Mittelbildungen », dont la condition de convergence se rapporte à l'intervalle $(n, \lambda n)$. A cette classe des procédés de sommabilité appartiennent, par exemple, ceux de Cesàro d'ordre quelconque, celui d'Abel, ainsi que la plupart des procédés de sommabilité de la forme (8). — Citons comme procédés de sommabilité dont la condition de convergence (16) se rapporte à d'autres intervalles (n, N) : le procédé de Borel, dont l'intervalle correspondant est $(n, n + \varepsilon\sqrt{n})$ $\varepsilon > 0$ (voir R. Schmidt [*b*]) ; le procédé défini par

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \int_0^\infty e^{-(\sqrt{t/x} - \sqrt{x})^2} t^{-1/4} s(t)dt, \qquad (x \to \infty)$$

dont l'intervalle est $(n, n + \varepsilon n^{3/4})$, (voir le § 14) ; les procédés de la forme

$$\sqrt{\frac{\mathrm{H}(x)}{2\pi}} \sum_{\nu=-x}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\nu^2 \mathrm{H}(x)} s_{x+\nu}, \qquad (x \to \infty)$$

dont l'intervalle est $(n, n + \varepsilon/\sqrt{\mathrm{H}(n)})$ dès que $\mathrm{H}(x)$, qui $\to 0$ avec $1/x$, satisfait à certaines conditions supplémentaires données par G. Valiron [a, p. 10, Th. II′], et enfin le procédé $\mathrm{D}(\log n)$ dont la condition de convergence (16) se rapporte à l'intervalle (n, n^λ), $\lambda > 1$.

II. — LES THÉORÈMES INVERSES RELATIFS AUX CONDITIONS DE CONVERGENCE DU TYPE-O

7. — Les théorèmes inverses qui se rapportent aux conditions de convergence (5), (14), (16) ou (17) présentent un caractère élémentaire par rapport aux théorèmes que nous allons considérer dans ce chapitre. Quoique les conditions de convergence (5), (14) ou (16) sont déjà nécessaires et suffisantes pour qu'une série sommable soit convergente, on peut encore les élargir pour la plupart des procédés particuliers considérés. Mais, et c'est là que surgit la nouvelle difficulté, tout procédé de sommabilité n'est pas susceptible d'une telle généralisation ; on le montrera d'ailleurs sur un exemple au § 9. Nous donnerons d'abord quelques théorèmes particuliers de cette espèce, dont les généralisations seront données au § 11 et suivants.

G. H. Hardy [*a*] avait découvert en 1909 (voir de même Hardy-Littlewood [*g*, p. 76] et K. Knopp [*d*, p. 104 et 112]) *que la condition de convergence* $u_n = o\,(1/n)$ *entraîne la convergence d'une série sommable* (C,k) *même lorsqu'on y remplace* o *par* O. Il avait démontré en même temps que ce fait subsiste aussi pour le procédé R(λ_n,1) :

La série Σu_n *sera convergente lorsqu'elle est sommable-*R(λ_n,1) *et lorsqu'elle satisfait à la condition de convergence.*

$$u_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right), \qquad n \to \infty. \tag{1}$$

Ce théorème ainsi que l'inversion de R(λ_n,k) sont contenus dans celle du procédé D(λ_n). D'ailleurs, G. H. Hardy [*b*], K. Ananda-Rau [*a*] et W. Rogosinski [*a*, p. 148] ont donné des démonstrations directes de l'inversion de R(λ_n,k), (ce dernier toutefois sous l'hypothèse que $\lambda_{n+1} \sim \lambda_n$). — Il est à ajouter que les sommabilités R(λ_n, k) et D(λ_n) sont équivalentes à la convergence ordinaire lorsque la suite λ_n croît assez vite, c.-à-d. lorsque $\lambda_n = O(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$, voir Hardy-Littlewood [*j*] et N. Wiener [*e*].

8. — Lorsqu'on passe de ce procédé à celui d'Abel, et surtout à celui de Borel, les difficultés deviennent bien plus grandes. L'hypothèse de Hardy : *Toute série* Σu_n *sommable*-A *est convergente lorsque* $u_n = O(1/n)$ fût démontré par J. E. Littlewood [*a*] en 1910. Tout l'appareillage que cet auteur a dû construire pour démontrer ce théorème montre combien sont grandes les difficultés qu'il fallait surmonter. Ceci ressort encore de la démonstration simplifiée que j'ai donnée dans la Note [*a*]. Le même principe de démonstration s'applique aussi à l'inversion du procédé D(λ_n) relative à la condition de convergence (1), que Littlewood a établi dans la même Note [*a*] mais sous l'hypothèse que $\lambda_{n+1} \backsim \lambda_n$. C'est Ananda-Rau [*d*] qui a montré plus tard que cette dernière condition est superflue. L'inversion du procédé de sommabilité de Borel relative à la condition de convergence $u_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, ne fut établie par Hardy et Littlewood [*e*] qu'en 1916. — Sous cette même condition de convergence, K. Knopp [*e*, p. 137-147] a donné une démonstration directe de l'inversion du procédé d'Euler. — Enfin, V. Ganapathy Iyer [*a*, p. 74, Th. 1] a donné une inversion relative à la condition de convergence (1) du procédé défini par

$$\alpha\sigma \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \frac{\lambda_\nu e^{-\sigma\lambda_\nu}}{1 - e^{-\alpha\sigma\lambda_\nu}}, \qquad (\sigma \to 0).$$

9. — Les procédés particuliers de sommabilité que nous venons de citer possèdent tous des théorèmes inverses relatifs à une condition de convergence du type-O. Or, nous l'avons déjà mentionné, tout procédé de sommabilité n'est pas susceptible d'une telle inversion. Pour le faire voir, considérons le procédé

$$\Psi(\sigma) = \sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \psi(\sigma\nu), \qquad (\sigma \to 0).$$

Supposons la fonction $\psi(x)$ positive, monotone à partir d'une valeur de x et telle que l'intégrale $\int_0^\infty \psi(t)\,dt$ converge et soit égale à 1 ; alors

$$\sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi(\sigma\nu) \to \int_0^\infty \psi(t)dt = 1, \qquad \sigma \to 0,$$

et le procédé Ψ est régulier. D'ailleurs, il est en quelque sorte équivalent au procédé Φ du § 3 ; car, en posant $\varphi(x) = \int_x^\infty \psi(t)\,dt$,

$$\Phi(\sigma) - \Psi(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \varphi(\sigma\nu) - \sigma \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \psi(\sigma\nu) \to 0, \qquad \sigma \to 0,$$

pour toutes suites s_n bornées.

Donc, d'après ce qui a été dit au § 3, la condition de convergence du type-o correspondante au procédé Ψ est $u_n = o(1/n)$; celle du type-O serait alors $u_n = O(1/n)$.

Or, les suites $c_n = \cos\alpha \log n$ et $s_n = \sin\alpha \log n$ satisfont bien à la condition de convergence du type-O. Comme elles ne convergent pas, elles ne pourront donc pas être sommable-Ψ si ce procédé possédait un théorème inverse relatif à la condition de convergence du type-O. Cherchons donc l'intervalle d'oscillation de $\Psi(\sigma)$ lorsque $\sigma \to 0$. En posant $\sigma = 1/n$ et $e_n = c_n + is_n = n^{\alpha i}$, l'on voit des relations

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty} e_\nu\, \psi\left(\frac{\nu}{n}\right) = n^{\alpha i}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\nu}{n}\right)^{\alpha i}\psi\left(\frac{\nu}{n}\right) \sim n^{\alpha i}\int_0^\infty \psi(t)t^{\alpha i}dt = n^{\alpha i}J(\alpha), n \to \infty,$$

que cet intervalle est le même pour les deux suites c_n et s_n, et qu'il est exactement égal à $(-|J(\alpha)|, |J(\alpha)|)$. Ces deux suites ne seront donc certainement pas sommable -Ψ lorsque

$$J(\alpha) = \int_0^\infty \psi(t)t^{\alpha i}dt \neq 0.$$

Mais, lorsque $J(\alpha) = 0$ pour $\alpha = \alpha_0$, l'intervalle d'oscillation $(-|J(\alpha_0)|, |J(\alpha_0)|)$ se réduit à zéro et les suites $\cos\alpha_0 \log n$ et $\sin\alpha_0 \log n$ sont alors sommable-Ψ vers la somme généralisée 0. Il en résulte que tout procédé Ψ, dont $J(\alpha) = 0$ pour au moins une valeur réelle de α, n'est pas susceptible d'une inversion relative à la condition de convergence du type-O. Ceci a lieu, p. ex., pour le procédé

$$(1 - r)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu\,(r^\nu - 2r^{2\nu} + 4r^{4\nu}), \qquad (r \to 1).$$

On voit donc, qu'une condition nécessaire pour que les procédés Φ ou Ψ soient susceptibles d'une inversion relative à une condition de convergence du type-O est que

$$\int_0^\infty \psi(t)t^{\alpha i}dt \neq 0 \text{ pour tout } \alpha \text{ réel.}$$

Or, la réciproque a de même lieu. On la doit à N. Wiener [a, b, c, d] et nous en reviendrons aux §§ 12, 13 et 14.

10. — La forme de la condition de convergence du type-O envisagée jusqu'à présent était

$$u_n = O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right), \qquad n \to \infty. \tag{1}$$

Quoi qu'elle représente une sensible extension par rapport aux conditions de convergence du type-o, elle ne contient pas les conditions

$$\sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu u_\nu = o(\lambda_n), \qquad n \to \infty,$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{n'+1} u_\nu \to 0, n \leqslant n' \leqslant \mathrm{N}, \qquad n \to \infty.$$

Elle n'est pas non plus une condition nécessaire pour qu'une série sommable soit convergente, car toute série convergente ne la satisfait pas. Il y a donc lieu à chercher une extension qui contiendrait les conditions précédentes et qui serait, par suite, nécessaire et suffisante pour qu'une série sommable soit convergente.

Pour l'inversion des procédés A et $\mathrm{D}(\lambda_n)$, une telle extension fut donnée par E. Landau [c] sous la forme

$$\limsup_{n=\infty} \max_{n \leqslant \nu \leqslant \mathrm{N}} | s_\nu - s_n | \leqslant w(\lambda) \to 0, \qquad 1 < \lambda \to 1, \tag{2}$$

qui est donc une condition de convergence du type-O nécessaire et suffisante pour qu'une série sommable soit convergente.

Lorsque $\mathrm{N} = \lambda n$, cette condition contient, d'une part, la condition $u_n = O(1/n)$, dans quel cas $w(\lambda) = \mathrm{M} \log \lambda$, et de l'autre la condition $\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu = o(n)$, où $w(\lambda) \equiv 0$. De même lorsque $N = N(\lambda.\lambda_n)$, $\mathrm{N}(x)$ désignant le nombre des $\lambda_n \leq x$, (2) est la condition de convergence du procédé $R(\lambda_n,1)$, (voir ma Note [r]).

Dans ce cas, la condition (2) contient, en outre, les trois conditions mentionnées au début de cet article.

Nous avons ainsi dans (2) une forme générale de la condition de convergence du type-O. Elle est la même pour tous les procédés de sommabilité et ne diffère d'un procédé particulier à l'autre que par la longueur de l'intervalle (n,N). Par contre, pour un procédé donné, cet intervalle est le même qu'il s'agisse de la con-

dition de convergence du type-o ou-O, si toutefois ce procédé est susceptible d'une telle inversion. Ces faits seront encore confirmés dans la suite sur différents procédés particuliers, ainsi que dans le cas général.

Dans la note citée, E. Landau [c] a donné l'inversion du procédé d'Abel (p. 370, § 3) relative à la condition (2) avec $N = \lambda n$, et celle du procédé $D(\lambda_n)$ (p. 373, § 4), sous l'hypothèse $\lambda_{n+1} \backsim \lambda_n$ et relative à l'intervalle $(n, N(\lambda.\lambda_n))$. Il a établi, en outre, dans la note [d] le théorème correspondant à l'intégrale $\int_0^\infty t^{-\sigma} u(t)dt$, $(\sigma \to o)$ en assurant la convergence de $s(x) = \int_1^x u(t)dt$, $(x \to \infty)$ lorsque la condition de convergence

$$\limsup_{n=\infty} \operatorname*{Max}_{x \leqslant x' \leqslant x^\lambda} \left| \int_x^{x'} u(t)dt \right| \leqslant w(\lambda) \to 0, \qquad 1 < \lambda \to 1,$$

est satisfaite. Mais dans les trois théorèmes il est en outre supposé que

$$s_n \text{ resp. } s(t) = O(1).$$

Sans cette condition « $s_n = O(1)$ » l'inversion du procédé $C(1)$ relative à la condition de convergence (2) se trouve chez Ananda-Rau [c], celle des procédés (18) § 6, chez Valiron [a, p. 11, Th. II''], et enfin chez R. Schmidt [a, b].

11. — Dans les théorèmes de Landau que nous venons de citer la suite s_n était assujettie à être bornée. Or, cette hypothèse est superflue. On peut, en effet, montrer par des considérations élémentaires, qu'elle résulte déjà de la condition de convergence et du fait que la suite s_n est sommable. Ces deux dernières hypothèses peuvent même être élargies ; ainsi p. ex. :

$$s_n = O\ (1), \qquad n \to \infty,$$

lorsque

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu r^\nu = O(1), \qquad r \to 1,$$

et

$$\operatorname*{Max}_{n \leqslant \nu < \lambda n} |s_\nu - s_n| = O(1), \qquad n \to \infty.$$

Les théorèmes de cette espèce appartiennent de même aux théorèmes inverses. Nous les appellerons « théorèmes inverses-O », pour les distinguer des théorèmes inverses proprement dits, que nous désignerons aussi par « théorèmes inverses-o » ; car, sans

nuire à la généralité, on peut toujours supposer que la limite généralisée, ainsi que la limite des suites considérées soit égale à zéro.

Les théorèmes inverses-O présentent un intérêt en soi ; mais ils jouent surtout un rôle important dans les démonstrations des théorèmes inverses-o. Dans ces démonstrations on passe, en effet, par cette étape intermédiaire, c'est-à-dire on établit d'abord $s_n = O(1)$ puis ensuite seulement $s_n = o(1)$. D'ailleurs les théorèmes inverses-O présentent le même caractère élémentaire que les théorèmes inverses-o relatifs aux conditions de convergence du type-o. Ces deux groupes de théorèmes sont intimement liés, et le principe de leurs démonstrations est exactement le même. Cela résulte du fait qu'à la condition de convergence du théorème inverse-O, c'est-à-dire à la condition de convergence

$$\max_{n \leqslant \nu \leqslant N} |s_\nu - s_n| = O(1), \qquad n \to \infty, \tag{3}$$

il correspond une condition équivalente, analogue à celle de Kronecker. J'ai montré [o], en effet, que (3) avec $N = N(\lambda \cdot \lambda_n) + 1$, équivaut à

$$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu u_\nu = O(\lambda_n), \qquad n \to \infty,$$

qui est la condition de Kronecker, mais où o est remplacé par O.

Ainsi, on s'assure facilement que les calculs effectués au § 5 donnent en même temps les théorèmes inverses-O, dont l'énoncé est le même que celui du théorème A, en y remplaçant toutefois dans les hypothèses $\delta(x) = o(1)$, $\Phi(x) = o(1)$ et la conclusion $s(x) = o(1)$, o par O.

D'ailleurs, il est indifférent qu'on énonce ce théorème pour le procédé Φ ou Ψ

$$(\Psi) \qquad \Psi(x) = \int_0^\infty \psi(x, t) s(t) dt, \qquad (x \to \infty),$$

pourvu qu'on suppose Ψ régulier, c'est-à-dire :

$$\psi(x, t) \geqslant 0 \qquad \text{pour tout } t \geqslant 0 \text{ à partir d'un } x,$$

$$\int_0^\infty \psi(x, t) dt = 1, \quad \int_0^y \psi(x, t) dt \to 0 \quad \text{pour tout } y > 0, \quad x \to \infty.$$

Car, lorsqu'on pose

$$\varphi(x, t) = \int_t^\infty \psi(x, u) du \qquad \text{et} \qquad s(0) = 0,$$

l'intégration par partie montre que l'existence de l'intégrale Φ entraîne toujours celle de Ψ, et que l'inverse n'a lieu en général que lorsque $s(t) = O(1)$. Donc, en partant de l'une quelconque des deux relations $\Phi(x) = O(1)$ ou $\Psi(x) = O(1)$, une fois $s(t) = O(1)$ établi, l'équivalence des procédés Φ et Ψ en résulte.

Un calcul semblable à celui effectué au § 5 (voir ma Note [q]) donne alors le

Théorème I. — *Lorsque $\psi(x,t)$ satisfait aux conditions :*

$$\psi(x,t) \geqslant 0, \text{ pour tout } t \geqslant 0 \text{ à partir d'un } x,$$

$$\int_0^\infty \psi(x, t)dt = 1, \qquad \int_0^y \psi(x, t)dt \to 0 \qquad \text{pour tout } y \geqslant 0, \qquad x \to \infty,$$

et lorsque $\Lambda(x)$ est une fonction continue, monotone, tendant vers l'infini avec x et telle que pour un y convenablement choisi on ait

$$\int_0^\infty \psi(x, t) \mid \log \Lambda(t)/\Lambda(y) \mid dt = O(1), \qquad x, y \to \infty,$$

alors, de la relation

$$\int_0^\infty \psi(x, t)s(t)dt = O(1), \qquad x \to \infty,$$

il résulte

$$s(x) = O(1), \qquad x \to \infty,$$

toutes les fois que la condition

$$\int_0^x \Lambda(t)s(t)dt = O\{\Lambda(x)\}, \qquad x \to \infty,$$

c'est-à-dire la condition

$$s(x') - s(x) = O(1) \qquad \text{pour} \qquad x \leqslant x' \leqslant \mathrm{V}\{\lambda\Lambda(x)\}, \qquad x \to \infty,$$

est satisfaite.

R. Schmidt [*a*, p. 134, Th. VI] a donné l'inversion-O de la classe des « gestrahlte Mittelbildungen » avec la condition de convergence de la forme $\sum_{\nu=n}^{n'} u_\nu = O(1)$, $n \leqslant n' \leqslant \lambda n$; dans le cas où le noyau a la forme $\varphi(\sigma\nu)$ voir de même ma Note [*l*]. D'autre part O. Szász [*a*, p. 255, Th. I] a donné l'inversion-O du procédé d'Abel relative à la condition

$\sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu = O(n)$, ainsi que [$b$, p. 273, Lemme 2] celle du procédé $D(\lambda_n)$ sous la condition $\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu u_\nu = O(\lambda_n)$, qui est toujours satisfaite lorsque (1) a lieu (voir Ananda-Rau [d, Lemma 1]) ; une démonstration directe de l'inversion-O de $R(\lambda_n, k)$ sous cette même condition a été donnée par N. Higaki [a, p. 70, Th. I].

12. — Une fois l'inversion-O établie, il s'agit dans la seconde et principale étape, de ramener le procédé de sommabilité dont l'inversion est à établir, à un procédé plus simple. En d'autres termes, sachant que $s_n = O(1)$, il s'agit de voir quand est-ce que le procédé en question peut être ramené à un procédé de la forme $R(\lambda_n, 1)$. Il est donc indifférent qu'on considère le procédé sous la forme Φ ou Ψ. Par suite, en supposant $\Lambda(t)$ dérivable avec $\Lambda(0) = 0$ on peut énoncer le théorème général suivant, que j'ai donné dans la Note [q].

THÉORÈME II. — *Soit $\psi(x,t)$ le noyau positif d'un procédé de sommabilité régulier, c'est-à-dire*

$$\psi(x, t) \geqslant 0 \qquad \textit{pour tout } t \geqslant 0 \textit{ à partir d'un } x,$$

$$\int_0^\infty \psi(x, t)dt = 1, \qquad \int_0^y \psi(x, t)dt \to 0 \qquad \textit{pour tout } y \geqslant 0, \qquad x \to \infty.$$

Si l'on peut déterminer x en fonction de y et une fonction monotone, dérivable et indéfiniment croissante $\Lambda(x)$ de manière que

$$N_{x,y}(t) = yV'(yt)\psi\{x, V(yt)\} \to N(t), \qquad x, y \to \infty,$$

et

$$N_{x,y}(t) \leqslant F(t) \qquad \textit{pour tout } t \geqslant 0,$$

où $F(t)$ est intégrable dans $(0, \infty)$ et $V(x)$ la fonction inverse de $\Lambda(x)$, alors de

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \psi(x, t)s(t)dt \to s, \qquad x \to \infty,$$

et

$$s(t) = O(1), \qquad t \to \infty,$$

il résulte

$$\frac{1}{\Lambda(x)}\int_0^x s(t)d\{\Lambda(t)\} \to s, \qquad x \to \infty,$$

lorsque $f(x) \equiv 0$ *est l'unique solution bornée de l'équation intégrale*

$$\int_0^\infty \mathrm{N}(zt)f(t)dt = 0, \qquad z > 0.$$

Cette dernière condition est d'ailleurs équivalente au fait que

$$\int_0^\infty \mathrm{N}(t)t^{ui}dt \neq 0 \qquad \textit{pour tout } u \textit{ réel},$$

comme cela résulte des travaux de N. Wiener [*c*].

13. — Une fois établi que la fonction $s(t)$ est sommable-$\mathrm{R}(\Lambda(t),1)$, il n'y a plus de difficulté à achever la démonstration du théorème inverse-*o*. Il ne reste, en effet, que la troisième et dernière étape (voir p. ex. ma Note [*q*]) qui consiste dans le

Théorème III. — *La fonction* $s(t)$ *étant sommable*-$\mathrm{R}(\Lambda(t), 1)$

$$\mathrm{R}(x) = \frac{1}{\Lambda(x)}\int_0^x s(t)d\,\{\Lambda(t)\} = \int_0^x \left\{1 - \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(x)}\right\} d\,\{s(t)\} \to s, \qquad x \to \infty,$$

il en résultera la convergence

$$s(t) \to s, \qquad t \to \infty,$$

lorsqu'elle satisfait à la condition de convergence

$$\lim_{t=\infty} \sup \operatorname*{Max}_{t \leqslant t' \leqslant \mathrm{T}} |s(t') - s(t)| < w(\lambda) \to 0, \qquad 1 < \lambda \to 1,$$

où $\mathrm{T} = \mathrm{V}\,\{\lambda\Lambda(t)\}$ *et* $\mathrm{V}(t)$ *est la fonction inverse de* $\Lambda(t)$.

Nous voyons ainsi que les théorèmes inverses-*o* relatifs à la condition de convergence du type-*O* s'obtiennent en trois étapes, c'est-à-dire par l'application successive des théorèmes I, II et III. On a ainsi une méthode générale pour établir ces théorèmes, que l'on peut résumer de la manière suivante :

Théorème B. — *Supposons : a) que le noyau* $\varphi(x,t)$ *du procédé de sommabilité*

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \varphi(x, t)d\,\{s(t)\}, \qquad (x \to \infty),$$

soit dérivable par rapport à t, *et qu'en posant*

$$-\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x, t) = \psi(x, t),$$

il satisfasse aux conditions

$$\psi(x, t) \geqslant 0 \qquad \textit{pour tout } t \geqslant 0 \textit{ à partir d'un } x,$$

$$\int_0^\infty \psi(x, t)dt = 1, \qquad \int_0^y \psi(x, t)dt \to 0 \qquad \textit{pour tout } y \geqslant 0, \qquad x \to \infty\ ;$$

b) que la fonction $\Lambda\,(x)$ *soit monotone, dérivable, indéfiniment croissante et telle qu'on puisse déterminer* x *en fonction de* y *de manière que :*

1. $$\mathrm{N}_{x,y}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi\,\{\, x, \mathrm{V}(yt) \,\} \to \mathrm{N}(t), \qquad t > 0, \qquad x, y \to \infty,$$

où $\mathrm{V}\,(x)$ *est la fonction inverse de* $\Lambda\,(x)$,

2. $$\mathrm{N}_{x,y}(t) \leqslant \mathrm{F}(t) \qquad \textit{pour tout } t \geqslant 0,$$

où $\mathrm{F}(t)$ *est intégrable dans* $(0, \infty)$, *et*

3. $$\int_0^\infty \mathrm{N}_{x,y}(t)\,|\log t\,|\,dt = O(1), \qquad x, y \to \infty.$$

Alors, la fonction $s(t)$ *étant sommable* -Φ *ou* -Ψ :

$$\int_0^\infty \varphi(x, t)\, d\,\{\, s(t) \,\} = \int_0^\infty \psi(x, t)s(t)dt \to s, \qquad x \to \infty,$$

il en résultera la convergence

$$s(t) \to s, \qquad t \to \infty,$$

lorsque la condition de convergence

$$\lim_{t=\infty} \sup \max_{t \leqslant t' \leqslant \mathrm{T}} |\, s(t') - s(t)\,| < w(\lambda) \to 0, \qquad 1 < \lambda \to 1, \tag{4}$$

est satisfaite, avec $\mathrm{T} = \mathrm{V}\,\{\,\lambda.\Lambda(t)\,\}$, *et lorsque*

$$\int_0^\infty \mathrm{N}(t)t^{ui}dt \neq 0 \qquad \textit{pour tout } u \textit{ réel.}$$

14. — Le théorème exposé contient comme cas particulier les inversions relatives aux conditions de convergence de la forme (2) ou (4) de presque tous les procédés qui ont été étudiés jusqu'à présent. A titre d'exemple, considérons ici les trois procédés particuliers suivants :

$$\text{(I)}\quad \frac{1}{x}\int_0^\infty \Psi(t\,/x)s(t)dt, \qquad \text{(II)}\quad \frac{1}{2\sqrt{\pi x}}\int_0^\infty e^{-\left(\sqrt{\frac{t}{x}}-\sqrt{x}\right)^2}\frac{s(t)}{t^{1/4}}\,dt,$$

$$\text{(III)}\quad e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \frac{x^\nu}{\nu\,!}.$$

I) L'application du théorème B à ce premier procédé est parti-

culièrement aisée ; c'est d'ailleurs le plus simple cas des « gestrahlte Mittelbildungen ». Ayant $\Lambda(t) = t$, l'intervalle (t,T) relative à la condition de convergence (4) sera $(t, t + \varepsilon t)$, $\varepsilon > 0$, et le théorème B aura lieu lorsque

$$\Psi(t) \geqslant 0, \qquad \int_0^\infty \Psi(t) \mid \log t \mid dt \quad \text{existe,} \qquad \int_0^\infty \Psi(t)dt = 1,$$

et lorsque

$$\int_0^\infty \Psi(t)t^{ui}dt \neq 0 \qquad \text{pour tout } u \text{ réel.}$$

On obtient ainsi à peu de chose près le théorème de N. Wiener [a, b, c, d].

II) Au deuxième procédé on arrive en particulier en cherchant les conditions que doit satisfaire la fonction $A(t)$ pour que $A(t) \backsim st^{-\frac{1}{4}}e^{2\sqrt{t}}$ résulte de

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}d\,\{\,A(t)\,\} \backsim 2\sqrt{\pi}\,se^{1/\sigma}, \qquad \sigma \to 0\,;$$

ce qu'on voit facilement en y posant

$$s(t) = \sqrt[4]{t}\,e^{-2\sqrt{t}}A(t) \qquad \text{et} \qquad \sigma = 1/x.$$

La fonction $\Lambda(t)$ de ce procédé étant $e^{\sqrt[4]{t}}$, en effectuant la substitution $t = V(y\tau) = \log^4(y\tau)$ et en posant $x = \log^2 y$, on s'assure que les conditions du théorème B sont bien satisfaites et que le noyau limite $N(t)$ est $\dfrac{1}{2t\sqrt{\pi}}e^{-4\log^2 t}$. Donc, $s(t) \to s$ lorsque la condition de convergence (4) relative à l'intervalle $\left(t, t + \varepsilon t^{\frac{3}{4}}\right)$, $\varepsilon > 0$ est satisfaite.

III) Pour le procédé de Borel, le calcul se simplifie un peu lorsque, après avoir obtenu l'inversion-O, on passe au procédé

$$e^{-x}\int_0^\infty \frac{x^t}{\Gamma(t+1)}s(t)dt$$

qui lui est équivalent lorsque $s_n = s(t) = O(1)$. La fonction $\Lambda(t)$ étant $e^{\sqrt{t}}$, en effectuant la substitution $t = \log^2(y\tau)$ et en posant $x = \log^2 y$, les conditions du théorème B se trouvent vérifiées et on arrive au même noyau limite $N(t)$ comme dans le cas précédent. Ainsi on obtient l'inversion du procédé de sommabilité-B relative à la condition de convergence (2) qui se rapporte à l'intervalle $(n, n + \varepsilon\sqrt{n})$, $\varepsilon > 0$.

III. — LES THÉORÈMES INVERSES SE RAPPORTANT AUX CONDITIONS DE CONVERGENCE DE FORME PLUS GÉNÉRALE

15. — La forme générale des conditions de convergence considérées jusqu'à présent était

$$\lim_{n=\infty} \sup \max_{n \leqslant n' \leqslant N} | s_{n'} - s_n | < w(\lambda) \to 0, \qquad 1 < \lambda \to 1, \qquad (1)$$

où $N = V \{ \lambda\Lambda(n) \}$. Or, on en a donné diverses autres, contenues dans la condition ci-dessus ou bien la généralisant dans divers sens. La condition

$$\lim_{n=\infty} \inf \min_{n \leqslant n' \leqslant N} \{ s_{n'} - s_n \} > -w(\lambda) \to 0, \qquad 1 < \lambda \to 1, \qquad (2)$$

est en particulier une généralisation directe de (1). Mais, quelle que soit la forme particulière de la condition de convergence, pour établir les théorèmes inverses-o il suffit de donner d'après les résultats généraux des §§ 12 et 13 les théorèmes inverse-O et l'inversion du procédé $R(\lambda_n,1)$ s'y rattachant. Car, le théorème II est indépendant de la forme particulière de la condition de convergence, puisqu'elle s'y trouve remplacée par « $s_n = O(1)$ ». Ainsi, les théorèmes inverses relatifs à des conditions de convergence de forme quelconque, se ramènent seulement aux théorèmes I et III. Ces théorèmes sont de nature plus ou moins élémentaire, quoique la démonstration des théorèmes inverses-O exige quelquefois des calculs assez longs.

Une forme particulière de la condition de convergence (2), qui est plus simple mais moins générale est

$$u_n > O\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right), \qquad n \to \infty. \qquad (3)$$

Elle est un cas particulier de (2) lorsque

$$\Lambda(t) = \lambda_n, \qquad n \leqslant t < n+1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_{n+1} \backsim \lambda_n, \qquad n \to \infty.$$

C'est sous cette forme que la condition (2) s'est d'abord présentée chez E. Landau [*b*, p. 107-113, Th. III et IV] qui a généralisé le théorème de Hardy de la manière suivante :

Pour qu'une série Σu_n *sommable-*(C,*k*) *soit convergente, il suffit déjà que* nu_n *soit bornée d'un côté, c'est-à-dire que la condition de convergence*

$$u_n > O\left(\frac{1}{n}\right), \qquad n \to \infty,$$

soit satisfaite.

Des démonstrations différentes de ce théorème ont été données par A. Pringsheim [*b*], Hardy et Littlewood [*g*, p. 76], K. Knopp [*d*, p. 112] et son extension aux nombres complexes dans le cas où les points nu_n sont situés dans un angle d'ouverture inférieure à π par F. Lukász [*a*]. D'autres extensions dans des directions différentes, ainsi que des théorèmes analogues relatifs aux intégrales ont été donnés par M. Cipolla [*a*, *b*], M. Fujiwara [*a*], T. Kubota [*a*] et d'autres. — C'est sous cette même condition de convergence que Hardy et Littlewood ont ensuite établi les inversions : du procédé de sommabilité d'Abel [*d*, p. 185-188, Th. 9] (voir de même ma Note [*a*] et M. J. Belinfante [*a*]; quant au cas où la limite généralisée est infinie voir T. Vijayaraghavan [*b*]) ; du procédé défini par la série de Lambert, dont la démonstration exigeait toutefois la connaissance de la loi de répartition asymptotique des nombres premiers [*f*] ; du procédé défini par

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu \left(\frac{x}{x+\nu}\right)^k, \qquad (x \to \infty),$$

[*i*, p. 36, Th. 6] ainsi que du procédé correspondant aux intégrales [*i*, p. 33, Th. 5]. — Enfin, ces mêmes auteurs [*c*, p. 146, Th. F] ont donné l'inversion relative à la condition de convergence (3) du procédé D(λ_n) lorsque $\lambda_{n+1} \backsim \lambda_n$; c'est K. Ananda-Rau [*e*] qui a montré par l'exemple suivant que cette dernière condition est indispensable : Soit

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_{2k} = 2\lambda_{2k-1} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{2k+1} = \lambda_{2k} + 2^{-2k},$$

alors la série $0 - 1 + 1 - 1 \ldots$ est sommable–R(λ_n, 1), satisfaite à la condition de convergence (3), mais ne converge pas. A ce sujet, voir de même O. Szász [*d*, p. 338-339]. — Une inversion relative aux intégrales de Laplace-Abel

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} u(t)dt, \qquad (\sigma \to 0),$$

se rapportant à la condition de convergence $u(t) > O\,(1/t)$, a été donné par G. Doetsch [*a*, p. 81], puis par S. Takenaka [*a*]. — La plupart de ces

résultats sont contenus dans l'inversion de N. Wiener [*b*, p. 178] du procédé

$$\int_0^\infty \varphi(\sigma t)u(t)dt, \qquad (\sigma \to 0),$$

relative à la condition $u(t) > O(1/t)$, de laquelle il déduit le théorème inverse relatif aux séries :

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\sigma\nu)u_\nu, \qquad (\sigma \to 0),$$

[*b*, p. 178-180 ; *c*, p. 35] (pour une démonstration simplifiée voir S. Bochner [*a*, p. 127, Th. III]) . Ce procédé contient en particulier [*b*, p. 180], le théorème inverse de Hardy et Littlewood relatif aux séries de Lambert, mais dont la démonstration ne s'appuie plus sur la loi de répartition des nombres premiers (voir aussi [*d*, p. 112-124]). N. Wiener [*b*, p. 181] a de même donné l'inversion du procédé de sommabilité de Borel relative à la condition de convergence $u_n > O(1/\sqrt{n})$, dont M. Fujiwara [*b*] a obtenu une inversion mais qui se rapporte plutôt à une condition de convergence du type-*o*. — Rappelons enfin que d'autres démonstrations de l'inversion de $R(\lambda_n, 1)$ se trouvent chez N. Higaki [*a*, p. 71, Th. III] lorsque $\lambda_{n+1} \sim \lambda_n$, et dans ma Note [*r*] ; quant aux rapports relatifs aux intervalles d'oscillation voir M. Fekete et C. Winn [*a*] ainsi que ma Note [*s*].

Ce n'est qu'en 1925 que R. Schmidt [*a*, *b*] a donné les théorèmes inverses relatifs aux conditions de convergence de la forme (2) (voir de même Ananda-Rau [*c*]). Les conditions qu'il considère diffèrent un peu de la condition (2), et peuvent dans le cas général s'écrire de la manière suivante

$$\liminf_{n=\infty} (s'_{n'} - s_n) \geq 0 \text{ pour tout } n' \text{ tel que } \Lambda(n') \sim \Lambda(n),\ n \to \infty. \quad (4)$$

Cette condition paraît plus générale que la condition (2), et pourtant (2) est équivalent à (4).

R. Schmidt [*a*] a considéré des théorèmes inverses de la classe des « gestrahlte Mittelbildungen » qui se rapportent à la condition de convergence de forme (2) ou (4) avec $\Lambda(x) = x$, et a donné en particulier l'inversion du procédé d'Abel, dont T. Vijayarahgavan [*a*] a simplifié la démonstration. O. Szász [*d*, p. 332, Th. II ; *e*] l'a généralisé ensuite aux intégrales de Laplace-Abel

$$\sigma \int_0^\infty e^{-\sigma t} s(t)dt,$$

par quoi il l'a étendu aux procédés $D(\lambda_n)$, dont S. Izumi [*b*] a donné une démonstration indépendante lorsque $\lambda_{n+1} \sim \lambda_n$. J'en ai donné d'autres démonstrations simplifiées reposant sur des principes différents dans

[*c*, p. 34, Th. B ; *d*, p. 74, Th. 6 ; *i*] (voir de même G. Ricci [*a*]). O. Szász [*f*, p. 329, Hauptsatz] a donné, en outre, le théorème inverse du procédé

$$\sigma \int_0^\infty \frac{s(t)dt}{(1+\sigma t)^\rho}, \qquad (\sigma \to 0), \qquad \rho > 0,$$

relatif à la condition de convergence de la même forme, qui a déjà été annoncé par Hardy et Littlewood [*i*, p. 37]. Enfin, S. Izumi [*a*, Th. I] a donné une démonstration directe de l'inversion du procédé (C, *k*), et [*a*, Th. III] ce même théorème relatif aux intégrales. — La plupart de ces théorèmes sont contenus dans celui de N. Wiener [*d*, p. 38, Th. XV] relatif au procédé

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi(\sigma\nu)u_\nu, \qquad (\sigma \to 0),$$

qui se rapporte à la condition de convergence de la forme (2) ou (4) avec $\Lambda(x) = x$. La marche simplifiée des démonstrations se trouve esquissée dans mes Notes [*j*, p. 587-588 ; *k*]. — R. Schmidt [*b*] a de même étudié l'inversion d'une classe de procédés de sommabilité qui contient comme cas particulier celui de Borel et qui se rapporte à la condition de convergence (2) ou (4) avec $\Lambda(x) = e^{\sqrt{x}}$. La démonstration simplifiée de cette inversion du procédé B a été ensuite donnée par T. Vijayaraghavan [*c*], et N. Wiener [*c*, p. 67-72, Th. XXI] l'a déduit de sa théorie générale. Enfin J. M. Hyslop [*a*] a donné l'inversion relative à une condition de convergence de forme (2) ou (4), avec $N = n + \varepsilon n^\alpha$, resp. $\Lambda(n) = \exp t^{1-\alpha}$, du procédé

$$\frac{x^{-\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\nu=-x}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\nu^2 x^{-2\alpha}\right) s_{\nu+x}, \quad 0 < \alpha < 1, \qquad (x \to \infty)$$

qui est un cas particulier des procédés considérés par Valiron [*a*], (voir de même Hardy-Littlewood [*k*]).

16. — Nous avons déjà mentionné que pour établir les théorèmes inverses-*o* relatifs à une condition de convergence quelconque, il suffit de prouver les théorèmes I et III correspondants à cette condition. Envisageons la condition de convergence (2) ; il s'agit en premier lieu d'établir les théorèmes inverses-*O*, c'est-à-dire de montrer que $s(t) = O(1)$ lorsque

$$\operatorname*{Min}_{t \leq t' \leq T} \{ s(t') - s(t) \} > -w, \qquad T = V\{\lambda\Lambda(t)\}, \qquad x \geqslant 0, \quad (5)$$

et lorsque l'une des deux relations suivantes a lieu :

$$\Phi(x) = \int_0^\infty \varphi(x, t)d\{s(t)\} = O(1), \qquad x \to \infty,$$

ou bien

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \psi(x, t)s(t)dt = O(1), \qquad x \to \infty.$$

La démonstration de ce théorème inverse-O est plus difficile que celle du théorème I, car la méthode donnée au § 4 n'est plus applicable. Cela provient du fait que la condition correspondante de Kronecker

$$\frac{1}{\Lambda(x)}\int_0^x \Lambda(t)d\,\{\,s(t)\,\} > O(1), \qquad x \to \infty, \tag{6}$$

n'est plus équivalente à la condition (5) ; (6) est bien une conséquence de (5), mais l'inverse n'a pas lieu (voir ma Note [*o*, p. 69]). Par suite en remplaçant (5) par (6), on ne peut conclure en général que $s(t) = O(1)$, mais tout au plus $s(t) > O\,(1)$, comme l'a montré O. Szász [*a*, p. 258, Th. 4] dans le cas de la sommabilité d'Abel. On est ainsi obligé de recourir à d'autres méthodes, et l'on y parvient en suivant en principe la voie qui se trouve dans ma Note [*l*]. Le résultat peut alors être résumé sous la forme du théorème suivant, dont la démonstration paraîtra dans ma Note [*t*].

Théorème IV. — *Soit*

$$\psi(x, t) \geqslant 0 \qquad \textit{pour tout } t \geqslant 0 \textit{ à partir d'un } x,$$

$$\int_0^\infty \psi(x, t)dt = 1, \qquad \varphi(x, y) = \int_y^\infty \psi(x, t)dt \to 1 \qquad \textit{pour } y \geqslant 0, \qquad x \to \infty.$$

Si la fonction $s(t)$ est bornée-Ψ :

$$\Psi(x) = \int_0^\infty \psi(x, t)s(t)dt = O(1), \qquad x \to \infty,$$

et satisfait à la condition

$$\operatorname*{Min}_{t \leqslant t' \leqslant T} \{\,s(t') - s(t)\,\} > -w, \qquad \textit{où} \qquad T = V\,\{\lambda\Lambda(t)\,\}, \qquad x \geqslant 0,$$

il en résulte

$$s(t) = O(1), \qquad t \to \infty,$$

lorsque la condition

$$\int_0^\infty \psi(x, t)\,|\,\log \Lambda(t)\,/\Lambda(y)\,|\,dt = O(1), \qquad x, y \to \infty,$$

est satisfaisante pour deux valeurs de y (y et y') telles que, c, c' et c'' étant des constantes, on ait

$$0 < c < \varphi(x, y) < c' < \varphi(x, y') < c'' < 1$$

pour x et y suffisamment grands.

T. Vijayaraghavan a donné le théorème inverse-O de cette espèce pour le procédé d'Abel [a] et pour celui de Borel [c, p. 317, Lemme 1]. Pour une démonstration différente du premier théorème de Vijayaraghavan, relatif aux intégrales de Laplace-Abel, voir ma Note [e] ; quant aux rapports plus précis relatifs aux intervalles d'oscillation, voir V. Ramaswami [a]. J'ai donné, en outre, dans les Notes [j, p] des théorèmes inverses-O correspondant du procédé

$$\int_0^{\infty} \varphi(\sigma t) d \left\{ s(t) \right\} ;$$

Pour des résultats plus précis entre les limites d'oscillations, voir V. Ramaswami [b].

17. — Il reste encore à établir le théorème III relatif à la condition de convergence (2). Ce théorème s'énonce comme suit et peut être démontré de la même manière que ceux de ma Note [m].

Théorème V. — *Soit* $\Lambda(x)$ *une fonction continue, monotone et tendant vers l'infini avec* x. *La fonction* $s(t)$ *étant sommable-* R $(\Lambda(t), 1)$:

$$\frac{1}{\Lambda(x)} \int_0^x s(t) d \left\{ \Lambda(t) \right\} \to s, \qquad x \to \infty,$$

il en résultera

$$s(x) \to s, \qquad x \to \infty,$$

lorsque $s(x)$ *satisfait à la condition de convergence*

$$\liminf_{x=\infty} \operatorname*{Min}_{x \leqslant x' \leqslant X} \left\{ s(x') - s(x) \right\} > -w(\lambda) \to 0,$$

où
$$1 < \lambda \to 1, \qquad X = V \left\{ \lambda \Lambda(x) \right\}. \tag{7}$$

Remarquons qu'on peut obtenir de la même manière le théorème inverse correspondant au procédé $R(\lambda_n, 1)$ lorsque $\lambda_{n+1} \backsim \lambda_n$. Mais lorsque $\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}$ ne tend pas vers 1, le théorème n'est plus valable (voir l'exemple de K. Ananda-Rau cité au § 15) à moins que dans la condition de convergence (2), où $\lambda_N \leqslant \lambda \cdot \lambda_n < \lambda_{N+1}$, on remplace N par N + 1 (ce qui revient à ajouter la condition supplémentaire $\liminf_{n=\infty} u_n \geqslant 0$, voir O. Szász [$c$, p. 338-339], ainsi que ma Note [r].

18. — Nous avons ainsi dans les théorèmes IV, II et V une méthode générale qui nous permet d'obtenir les théorèmes inverses-o

de la plupart des procédés de sommabilité couramment employés, et qui se rapportent aux conditions de convergence du type-O et de la forme (2). Pour obtenir ces théorèmes pour les procédés particuliers considérés aux articles précédents il ne nous reste qu'à voir si ces procédés vérifient les conditions du théorème IV. Or, il est facile de voir, même dans le cas général, que les conditions du théorème IV sont satisfaites pour tout procédé qui vérifie les conditions du théorème II. En effet, si pour un x convenablement choisi le noyau

$$\varphi(x, y) = \int_y^\infty \psi(x, t)dt$$

satisfait aux conditions du théorème II, on aura

$$\varphi(x, y) \to \int_a^\infty \mathrm{N}(t)dt \qquad \text{lorsque} \qquad y = \mathrm{V}(au),\ u \to \infty.$$

Donc, en prenant deux valeurs différentes de a (a et a') telles que

$$0 < \int_a^\infty \mathrm{N}(t)dt < \int_{a'}^\infty \mathrm{N}(t)dt < 1,$$

les valeurs correspondantes de y ($y = \mathrm{V}(au)$ et $y' = \mathrm{V}(a'u)$ vérifieront certainement les inégalités

$$0 < c < \varphi(x, y) < c' < \varphi(x, y') < c'' < 1$$

pour x et y suffisamment grands.

D'autre part, pour ces mêmes valeurs de y, la condition

$$\int_0^\infty \psi(x, t) \mid \log \Lambda(t) / \Lambda(y) \mid dt = O(1), \qquad x, y \to \infty,$$

(qui se réduit après la substitution $t = \mathrm{V}(u\tau)$ à

$$\int_0^\infty \mathrm{N}_{x,u}(\tau) \mid \log \tau \mid d\tau = O(1), \qquad x, u \to \infty,$$

sera satisfaite lorsque $\mathrm{N}_{u\,x}(\tau) \leqslant F(\tau)$ et lorsque $F(\tau) \mid \log \tau \mid$ est intégrable dans $(0, \infty)$.

Cette dernière condition est bien remplie pour la plupart des procédés de sommabilité considérés jusqu'à présent. En particulier, elle aura lieu lorsque le noyau $\psi\,(x,t)$ a l'une des trois formes :

$$\frac{1}{x}\psi\left(\frac{t}{x}\right), \qquad \frac{1}{x}e^{-\left(\sqrt{\frac{t}{x}}-\sqrt{x}\right)^2} t^{-\frac{1}{4}} \qquad \text{ou} \qquad \frac{e^{-x}x^t}{\Gamma(t+1)}.$$

Le premier noyau correspond au procédé de N. Wiener [c, p. 38,

Th. IX] $\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi(\tau\nu)u_\nu$, qui donne, cette fois, le théorème inverse dans toute sa généralité ; le second noyau est celui du procédé

$$\frac{1}{x}\int_0^{\infty} e^{-\left(\sqrt{\frac{t}{x}}-\sqrt{x}\right)^2} t^{-\frac{1}{4}} s(t)dt, \qquad (x \to \infty) ;$$

tandis que le troisième correspond au procédé de Borel.

En résumant, nous voyons que pour établir les théorèmes inverses des procédés de sommabilité de la forme générale, il s'agit, en premier lieu, de trouver la fonction $\Lambda\ (x)$ qui par sa vitesse de croissance détermine la condition de convergence. La voie suivie revient alors, en principe, à effectuer dans le procédé considéré la substitution $t = \mathrm{V}(\tau)$. En assujettissant alors le procédé ainsi obtenu à satisfaire aux conditions du théorème II, il devient intimement lié aux « gestrahlte Mittelbildungen » étudiées par R. Schmidt, ce qui nous permet de réunir les théories de R. Schmidt et N. Wiener et d'en déduire les théorèmes inverses dans toute leur généralité. Il est vrai, que les conditions du théorème II semblent restreindre les procédés de sommabilité plus que cela ne soit nécessaire ; mais ces conditions peuvent fort probablement être élargies de manière à ne supposer que l'existence de la limite $\lim\limits_{x,y=\infty} \varphi \left\{ x, \mathrm{V}(yt) \right\}$, ce qui donnerait alors la condition qui correspond exactement à celle de R. Schmidt, définissant les « gestrahlte Mittelbildungen ». D'ailleurs, on s'assure facilement que le théorème II reste valable lorsqu'on ne suppose sur $\varphi\ (x,t)$ que

$$\lim_{x,y=\infty} \varphi \left\{ x, \mathrm{V}(yt) \right\} = \mathrm{N}_1(t) \to 0, \qquad t \to \infty,$$

et

$$\mathrm{N}_{x,y}(t) = \frac{\partial\varphi \left\{ x, \mathrm{V}(yt) \right\}}{\partial t} \to \mathrm{N}(t), \qquad x, y \to \infty.$$

sans avoir besoin de supposer que $\mathrm{N}_{xy}(t)$ reste inférieure à une fonctiôn intégrale dans $(0, \infty)$.

19. — Quoique la condition de convergence que nous venons de considérer en dernier lieu est très générale, il en existe encore d'autres qui n'y sont pas contenues. C'est le cas, p. ex., de la condition

$$\rho(x')s(x') \geqslant \rho(x)s(x) \qquad \text{pour tout} \qquad x' \geqslant x,$$

où $\rho\ (x)$ est une fonction croissante et telle que

$$\lim_{x=\infty} \sup \frac{\rho(\lambda x)}{\rho(x)} \to 1 \qquad \text{lorsque} \qquad 1 > \lambda \to 1,$$

sous laquelle E. Landau [*b*, p. 125, Th. X] a établi l'inversion du procédé de Cesàro relative aux intégrales. Or, la condition (7) peut se généraliser de manière à embrasser aussi les conditions de cette forme. Par là on donne aux conditions de convergence leur plus grande extension, que nous allons encore brièvement considérer.

Nous avons vu, que la condition de convergence est complètement déterminée par la fonction $\Lambda(x)$, qui dépend de son côté du procédé considéré. A chacune de ces fonctions $\Lambda(x)$ nous allons définir une classe de fonctions $\rho(x)$ — la classe R-*o* — de la manière suivante

$$\rho(x) > 0 \qquad \text{pour tout} \qquad x \geqslant 0,$$

$$\lim_{x=\infty} \sup \max_{x \leqslant x' \leqslant X} \frac{| \rho(x') - \rho(x) |}{\rho(x)} < W(\lambda) \to 0. \qquad 1 < \lambda \to 1, \quad (8)$$

où
$$X = V \{ \lambda\Lambda(x) \}.$$

Une sous-classe de la classe R-*o* est p. ex. la classe des fonctions $\rho(x)$ qui sont telles que $\rho \{ V(x) \}$ soit à croissance régulière, c'est-à-dire telles que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\rho \{ V(\lambda x) \}}{\rho \{ V(x) \}} \qquad \text{existe pour tout} \qquad \lambda,$$

(à propos de cette classe de fonctions voir ma Note [*h*]). A cette classe appartiennent p. ex. les fonctions $\Lambda^k(x)$, avec k quelconque.

Moyennant ces fonctions $\rho\ (x)$ on peut donner à la condition de convergence dont il est question, la forme générale suivante

$$\lim_{x=\infty} \inf \min_{x \leqslant x' \leqslant X} \frac{1}{\rho(x)} \{ \rho(x')s(x') - \rho(x)s(x) \} > -w(\lambda) \to 0,$$
$$1 < \lambda \to 1, \qquad (9)$$

où $\rho\ (x)$ est une fonction quelconque de la classe R-*o* et $X = V \{ \lambda\Lambda(x) \}$. Cette condition contient évidemment comme cas particulier la condition (7), puisqu'elle se réduit à cette condition lorsque $\rho\ (x) \equiv 1$. Elle contient de même la condition citée de E. Landau, car elle est satisfaite lorsque $\rho\ (x)s(x)$ ne décroît pas. La condition (9) réunit ainsi ces deux conditions en une seule.

Pourtant, (9) ne généralise nullement la condition (7) dans le

cas où $s(x) = O\,(1)$. Car, en tenant compte de (8) la double inégalité

$$\{ s(x') - s(x) \} + \mathrm{M}\frac{|\,\rho(x') - \rho(x)\,|}{\rho(x)} > \frac{\rho(x')s(x') - \rho(x)s(x)}{\rho(x)} >$$
$$> \{ s(x') - s(x) \} - \mathrm{M}\frac{|\,\rho(x') - \rho(x)\,|}{\rho(x)},$$

montre que ces deux conditions sont équivalentes lorsque $s(x)$ est borné.

Par suite, pour établir les théorèmes inverses relatifs aux conditions de convergence de la forme (9), il suffit d'établir les théorèmes inverses-O relatifs à ces conditions, puisque, une fois $s(x) = O\,(1)$ obtenu, la condition de convergence (9) se ramène à la condition (7). Or, ces théorèmes peuvent être obtenus, du moins pour des fonctions particulières de la classe R-o, d'une manière analogue à celle du théorème IV.

Remarquons seulement que V. Avakumović [a] a donné l'inversion-O de cette espèce du procédé défini par l'intégrale de Laplace-Abel

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t} d\,\{ s(t) \}, \qquad (\sigma \to 0),$$

en généralisant le théorème que j'ai établi dans la Note [g], et qui se rapporte aux fonctions spéciales de la classe R-o. J'ai donné [m], en outre, dans toute leur généralité des théorèmes inverses de cette espèce qui se rapportent au procédé R($\Lambda(t)$,1).

Nous avons mentionné ici seulement les types principaux des conditions de convergence. Or, il en existe encore diverses autres qui sont des cas plus ou moins particuliers des conditions étudiées. Sans mentionner ces conditions, nous nous contenterons seulement de citer les principaux travaux qui les contiennent : K. Ananda-Rau [c], V. Amato [a], R. Agnew [a], K. K. Chen [a], M. Cipolla [b], L. Fejér [a], Hardy et Littlewood [b, Ths. 27-34 ; c, p. 135-136, Th. A ; h, § 8], J. Karamata [b ; r], L. Neder [a], G. Sunouchi [a], O. Szász [a ; b ; c, p. 15-17, § 3 ; g ; h.], S. Takenaka [a] et Hardy-Littlewood [j], M. Obreschkoff [a, p. 232, Th. 3], N. Wiener [e], A. Zygmund [a], ces quatre derniers travaux se rapportant aux séries à larges lacunes.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

(Les nombre entre parenthèses [ ] indiquent les pages où le travail est cité).

1. AGNEW, R. — *a.* On Equivalence of Methods of Evoluation of Sequences. *Tôhoku Math. Journal.* **35**, 244-252 (1932). [40].

2. AMATO, V. — *a.* Un criterio di convergenza e sua applicazione alla summabilita secondo Riesz. *Napoli Rendic.* (3), **28**, 39-50, (1922). [40].

3. ANANDA-RAU, K. — *a.* A Note on a Theorem of Mr. Hardy's. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2) **17**, 334-336 (1919). [20].
   b. On Lambert's Series. *Ibid.* (2) **19**, 1-20 (1920). [19].
   c. On the Relation between the Convergence of a Serie and its Summability by Cesàro's Means. *Journal Indian Math. Soc.* **15**, 265-268 (1924). [24, 33, 40].
   d. On the Converse of Abel's Theorem. *Journal Lond. Math. Soc.* **3**, 200-205 (1928). [21, 27].
   e. An Exemple in the Theory of Summation of Series by Riezs's typical Means. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2) **30**, 367-378 (1930). [32, 36, 37].

4. AVAKUMOVIĆ, V. — *a.* Sur une extension de la condition de convergence des théorèmes inverses de la sommabilité. *C. R. Acad., Paris*, **200**, 1515-1517 (1935). [40].

5. BELINFANTE, M. J. — *a.* Die Hardy-Littlewoodsche Umkehrung des Abelschen Stetigkeitssatzes in der intuitionistischen Mathematik. *Proc. Acad. Amsterdam*, **34**, 401-412 (1931). [32].

6. BIEBERBACH, L. — *a.* Neuere Untersuchungen über Funktionen von komplexen Variablen. *Enzyklopaedie der Math. Wiss.* Bd. II, 3, Heft 4, Leipzig 1921. [5].

7. BOCHNER, S. — *a.* Umkehrsätze für allgemeine Limitierungsverfahren. *Sitzungsberichte der Preuss. Akad. Wiss.*, Math.-Phys. Klasse, 1933, III, 126-144. [33].

8. CHEN, K. K. — *a.* On the Theory of divergent Series. *Tôhoku Math. Journal*, **29**, 348-358 (1928). [7, 12, 40].

9. CIPOLLA, M. — *a.* Sul criterio di convergenza di Hardy. *Napoli Rendic* (3), **26**, 96-107, 151-160 (1920). [32].
   b. Criterii di convergenza reducibili a quello die Hardy-Landau. *Napoli Rendic.* (3), **27**, 28-38 (1921). [32, 40].

10. DOETSCH, G. — *a.* Ein Konvergenzkriterium für Integrale. *Math. Ann.* **82**, 68-82 (1920). [14, 32].

11. FEJER, L. — *a.* La convergence sur son cercle de convergence d'une série de puissance effectuant une représentation conforme du cercle sur le plan simple. *C. R. Acad. Paris*, **156**, 46-49 (1913). [40].

12. Fekete, M. and Winn, C. E. — *a*. On the Connexion between the Limits of Oscillation of Sequence and its Cesàro and Riesz Means. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **35**, 448-513 (1933). [33].

13. Fujiwara, M. — *a*. Ueber summierbare Reihen und Integrale. *Tôhoku Math. Journal*, **15**, 323-329 (1919). [32].

b. Ein Satz über Borelsche Summation. *Tôhoku Math. Journal*, **17**, 339-343 (1920). [33].

14. Ganapathi Iyer, V. — *a*. Tauberian Theorems on generalized Lambert's Series. *Journal Indian Math. Soc.* (New Series), **1**, 73-87 (1934). [21].

15. Hardy, G. H. — *a*. Theorems relating on the Summability and Convergence of slowly oscillating Series. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **8**, 301-320 (1910). [20].

b. An Extension of a Theorem on Oscillation Series. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **12**, 174-180 (1913). [20].

16. Hardy, G. H. and Littlewood, J. E. — *a*. The Relations between Borel's and Cesàro's Methodes of Summation. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **11**, 1-16 (1913). [11, 18].

b. Contributions to the Arithmetic Theory of Series. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **11**, 411-478 (1913). [40].

c. Some Theorems concerning Dirichlet's Series. *Messenger of Math.* (2), **43**, 134-147 (1914). [32, 40].

d. Tauberian Theorems concerning Power Series and Dirichlet's Series whose Coefficients are positive. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **13**, 174-191 (1914). [32].

e. Theorems concerning the Summability of Series by Borel's exponential Method. *Rendic. Circ. Mat. Palermo*, **41**, 36-53 (1916). [21].

f. On a Tauberian Theorem for Lambert's Series, and some fundamental Theorems in the Analytic Theory of Numbers. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **19**, 21-29 (1919). [32].

g. Solutions of the Cesaro Summability Probleme for Power series and Fourier Series. *Math. Zeit.* **19**, 67-96 (1923). [20, 32].

h. Notes of the Theory of Series (IV) : On the strong Summability of Fourier Series. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **26**, 273-286 (1927). [7, 40].

i. Notes on the Theory of Series (XI) : On Tauberian Theorems. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **30**, 23-37 (1929). [10, 32, 34].

j. A further Note on the Converse of Abel's theorem. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **25**, 219-236 (1926). [20, 40].

k. Some new convergence Criteria for Fourier Series. *Ann. Scuola norm. super. Pisa*, II. s. **3**, 43-46 (1932). [34].

17. Higaki, N. — *a*. Some Theorems on Riesz's Method of Summation. *Tôhoku Math. Journal*, **41**, 70-79 (1935). [7, 27, 33].

18. Hyslop, J. M. — *a*. On the Summability of Series by a Method of Valiron. *Proceedings Edinburgh Math. Soc.* (2), **4**, 218-223 (1936). [34].

19. Izumi, S. — *a*. On the Condition for the Convergency of the Series summable (C, *r*). *Tôhoku Math. Journal*, **33**, 117-126 (1930). [34].

b. A Generalisation of Tauber's Theorem. *Proceedings Acad. Japon.* V (1929), 57-59. [33].

20. Karamata, J. — *a*. Über die Hardy-Littlewoodsche Umkehrungen des Abelschen Stetigkeitssatzes. *Math. Zeit.* **32**, 31.-320 (1930), [21, 32].

b. Théorèmes inverses de sommabilité. I et II. *Glas, Acad. Serbe,* CXLIII (70), 21-24, 143-146 (1931). [40].
c. Neuer Beweis und Verallgemeinerung der Tauberschen Sätze, welche die Laplacesche und Stieltjesche Transformation betreffen. *Journal für die reine und angewandte Math.* **164**, 27-39 (1931). [34].
d. Sur le rapport entre les convergences d'une suite de fonctions et de leurs moments, avec application à l'inversion des procédés de sommabilité. *Studia Math.* III, 68-76 (1931). [34].
e. Ueber einen Satz von Vijayaraghavan. *Math. Zeit.* **34**, 737-740 (1932). [36].
f. Un théorème général d'inversion des procédés de sommabilité· *Verhandlungen des Intern. Math. Kongr.* Zurich 1932. Bd. II, 147-149. [17].
g. Einige weitere Konvergenzbedingungen der Inversionssätze der Limitierungsverfahren. *Publ. Math. Univ. Beograd,* **2**, 1-16 (1933). [40].
h. Sur un mode de croissance régulière. *Bull. Soc. Math. Franc.* **61**, 55-62 (1933). [39].
i. Quelques théorèmes de nature tauberienne. *Studia Math.* **4**, 4-7 (1933). [34].
j. Ueber die O-Inversionssätze der Limitierungsverfahren. *Math, Zeit.* **37**, 582-588 (1933). [34, 35, 36].
k. Un aperçu sur les inversions des procédés de sommabilité. *C. R. du II^e^ Congrès des Math. des pays Slaves.* Praha 1934, 49-61 (1935). [5, 17, 34].
l. Ueber einige Inversionssätze der Limitierungsverfahren. *Publ. Math. Univ. Beograd,* III, 153-160 (1934). [10, 26].
m. Quelques théorèmes de nature tauberienne relatifs aux intégrales et aux séries. *Bull. Acad. Serbe,* **2**, 169-205 (1935). [36, 40].
n. Ueber einen Konvergenzsatz des Herrn Knopp. *Math. Zeit.* **40**, 421-425 (1935). [16].
o. Ueber einige reihentheoretische Sätze. *Math. Zeit.* **41**, 67-74, (1936). [16, 25, 35].
p. Bemerkung zur Note « Ueber einige Inversionssätze der Limitierungsverfahren ». *Publ. Math. Univ. Beograd.* IV. 181-184 (1935)[36].
q. Allgemeine Umkehrsätze der Limitierungsverfahren. *Hamburg. Abhandlungen,* **12**, 46-61 (1937). [5, 26, 27, 28].
r. Einige Sätze über die Rieszschen Mittel. *Bull. Acad. Serbe.* (Sous presse). [23, 33, 36, 40].
s. Beziehungen zwischen den Oscillationsgrenzen einer Funktion und ihrer arithmetischen Mittel. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (Sous presse). [33].
t. Ueber allgemeine O-Umkehrsätze. *Bull. International Acad. Yougoslave.* (Sous presse). [35].

21. KIENAST, A. — *a.* Extensions of Abel's Theorem and its Converses. *Proceedings Cambridge Philos. Soc.* **19**, 129-147 (1918). [14, 15].
b. Erweiterungen des Abelschen Satzes für Potenzreihen und ihre Umkrhrungen. *Jahresschrift der Naturforsch. Gesellschaft Zürich.* **67**, 209-223 (1922). [15].
c. Extensions to other Series of Abel's and Tauber's Theorems on

Power Series. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **25**, 45-52 (1926). [10, 15, 19].

22. Knopp, K. — *a.* Grenzwerte von Reihen bei der Annäherung an die Konvergenzgrenze. (*Inaugural-Dissertation*, Berlin), 1907. [6].
    b. Eine notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung. *Rendic. Circolo Mat. Palermo*, **25**, 237-252 (1909). [7].
    c. Neuere Untersuchungen in der Theorie der divergenten Reihen. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.* **32**, 43-67 (1923). [5].
    d. Zur Theorie der C- und H-Summierbarkeit. *Math. Zeit.* **19**, 97-113 (1923). [20, 32].
    e. Ueber das Eulersche Summierungsverfahren. II. *Math. Zeit.* **18**, 125-156 (1923). [15, 18, 21].
    f. Ueber eine Kroneckersche Konvergenzbedingung. *Sitzungsberichte Berlin. Math. Gesellschaft*, **24**, 3-5 (1925). [16].
    g. Theorie und Praxis der unendlichen Reihen. III Auflage, Berlin 1932 [5].
23. Kronecker, L. — *a.* Quelques remarques sur la détermination des valeurs moyennes. *C. R. Acad. Paris*, **103**, 980-987 (1886). [15].
24. Kubota, T. — *a.* Einige Sätze den Grenzwert betreffend. *Tôhoku Math. Journal.* **15**, 314-332 (1919). [32].
25. Landau, E. — *a.* Ueber die Konvergenz einer Klasse von unendlichen Reihen am Rande des Konvergenzgebietes. *Monatsheft für Math. und Phys.* **43**, 8-28 (1907). [18].
    b. Ueber die Bedeutung einiger neuen Grenzwertsätze der Herrn Hardy und Axer. *Prace Matematyczno Fizyczne*, **21**, 97-177 (1910). [32, 39].
    c. Ueber einen Satz des Herrn Littlewood. *Rendic. Circolo Mat. Palermo*, **35**, 365-376 (1913). [23, 24].
    d. Ein neues Konvergenzkriterium für Integrale. *Sitzungsberichte Bayer. Akad. Wiss. Math.-Phys.* 1913, 416-467. [24].
26. Littlewood, J. E. — *a.* The Converse of Abel's Theorem on Power Series. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **9**, 434-448 (1911). [21].
27. Lorenz, G. — *a.* Ueber lineares Summierungsverfahren. *Rec. Math. Soc. Math. Moscou*, **39**, n° 3, 44-50 (1932). [12].
28. Lukász, F. — *a.* Bemerkung zu einem Konvergenzsatz des Herrn Landau. *Arch. Math. Phys.* (3), **23**, 367-378 (1915). [32].
29. Neder, L. — *a.* Ueber Taubersche Bedingungen. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **23**, 172-184 (1924). [40].
30. Obreschkoff, M. — *a.* Ueber einige Sätze für Summierung divergenter Reihen. *Tôhoku Math. Journal*, **32**, 231-233 (1930). [40].
31. Perron, O. — *a.* Beitrag zur Theorie der divergenten Reihen. *Math. Zeit.* **6**, 286-310 (1920). [9, 12].
32. Pringsheim, A. — *a.* Ueber das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreis. *Münchener Berichte*, **30**, 37-100 (1900). [7].
    b. Ueber eine Konvergenzbedingung für unendliche Reihen die durch iterierte Mittelbildungen reduziebel ist. *Ibid.* **50**, 275-284 (1920). [32].
33. Ramaswami, V. — *a.* Some Tauberian Theorems on Oscillation. *Journal Lond. Math. Soc.* **10**, 294-308 (1935). [36].
    b. The generalised Abel-Tauber theorem. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2) **42**, 408-417 (1936). [36].

34. Ricci, G. — *a.* Sui teoremi Tauberiani, I. *Anal. Math. pura appl.* (IV), 13, 287-308 (1935). [34].

35. Riesz, M. — *a.* Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen. *Acta Math.* **40**, 349-361 (1916). [16].

36. Rogosinski, W. — *a.* Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen. *Math. Zeit.* **25**, 132-149 (1926). [7, 20].

37. Schmidt, R. — *a.* Ueber divergente Reihen und lineare Mittelbildungen. *Math. Zeit.* **22**, 89-152 (1925). [5, 19, 24, 26, 33].

b. Ueber das Borelsche Summierungsverfahren. *Schriften Königsberger gelehrten Gesellschaft*, **1**, 202-256 (1925). [5, 19, 24, 33, 34].

38. Schnee, W. — *a.* Ueber Dirichletsche Reihen. *Rendic. Circolo Mat. Palermo*, **27**, 87-116 (1909). [7].

39. Schur, I. — *a.* Ueber lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen. *Journal für die reine und angewandte Math.* **151**, 79-111 (1921). [12, 13, 17].

40. Sunouchi, G. — *a.* On a linear Transformation of infinite Sequences. *Proceedings Phys. Math. Soc. Japan* (III), **16**, 161-163 (1934). [40].

41. Szász, O. — *a.* Verallgemeinerungen eines Littlewoodschen Satzes über Potenzreihen. *Journal Lond. Math. Soc.* **3**, 254-262 (1928). [26, 35, 40].

b. Ueber Dirichletsche Reihen an der Konvergenzgrenze. *Atti del Congresso Intern. Mat.* Bologna 1928, 269-276 (1929). [27, 40].

c. Ueber neue Untersuchungen im Zusammenhange mit dem Abelschen Potenzreihensatz. *Mat. Fiz. Lapok*, **36**, 10-22 (1929). [5, 36, 40].

d. Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze Tauberscher Art. *Sitzungsberichte Bayer. Akad. Wiss.*, Naturw. Abt. München 1929, 325-340. [32, 33].

e. Ueber Sätze Tauberscher Art. *Jahresberichte Deutsch. Math. Verein.* **39**, 28-31, (1930). [5, 33].

f. Ueber einige Sätze von Hardy und Littlewood. *Nachr. der Gesellschaft der Wiss. Göttingen*, Math. Phys. Klasse 1930, 315-333. [10, 34].

g. Generalization of two Theorems of Hardy and Littlewood on Power Series. *Duke Math. Journal*, **1**, 105-111 (1935). [40].

h. Converse Theorems of Summability for Dirichlet's series. *Trans. Amer. Math. Soc.* **39**, 117-130 (1936). [40].

42. Takenaka, S. — *a.* Tauberian Theorems concerning Dirichlet's Series and allied Integrals. *Japonese Journ. Math.* **2**, 51-63 (1925). [32, 40].

43. Tauber, A. — *a.* Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen. *Monatshefte für Math. und Phys.* **8**, 273-277 (1897). [6].

44. Toeplitz, O. — *a.* Ueber allgemeine lineare Mittelbildungen. *Prace Matematyczno Fizyczne*, **22**, 113-119 (1911). [12].

45. Valiron, G. — *a.* Remarques sur la sommation des séries divergentes par les méthodes de M. Borel. *Rendic. Circolo Mat. Palermo*, **42**, 267-284 (1917). [15, 19, 24, 34].

46. Vijayaraghavan, T. — *a.* Tauberian Theorem. *Journal Lond. Math. Soc.* **1**, 113-120 (1926). [33, 36].

b. Converse Theorem on Summability. *Journal Lond. Math. Soc.* **2**, 215-222 (1927). [32].

c. A Theorem concerning the Summability of Series by Borel's Method. *Proceedings Lond. Math. Soc.* (2), **27**, 316-326 (1928). [34, 36].

47. Wiener, N. — *a.* Une méthode nouvelle pour la démonstration de théorèmes de Tauber. *C. R. Acad. Paris*, **184**, 793-795 (1927). [5, 22, 30].

b. A new Method in Tauberian Theorems. *Journal Math. Phys.* M. I. T. **7**, 161-184 (1928). [5, 22, 30, 33].

c. Tauberian Theorems. *Ann. Math.* (2), **33**, 1-100 (1932). [5, 22, 24, 28, 30, 33, 34, 37].

d. The Fourier Integral and certain of its Applications. *Cambridge Univ. Press.* 1933. [5, 22, 30, 33, 34].

e. A. Tauberian gap theorem of Hardy and Littlevood *Journal Chim. Math. Soc.* **1**, 15-22 (1936). [20, 40].

48. Zygmund, A. — *a.* On a Theorem of Ostrowsky. *Journal Lond. Math. Soc.* **6**, 162-163 (1931). [40.]

TABLE DES MATIÈRES

Saint-Amand (Cher), France. — Imprimerie R. BUSSIÈRE. — 31-5-1937

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. Bussière.